



DELHI UNIVERSITY  
LIBRARY

DELHI UNIVERSITY LIBRARY SYSTEM

Cl. No. **B5**

**168N22**

Ac. No **313267**

Date of release/clean

This book should be returned on or before the date last stated.

An overdue charge of 10 nP. will be charged for each day.  
- 3 APR 1979

یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے جن کو حقوق  
کاپی رائٹ حاصل ہیں، طبع کی گئی ہے +

# فہرست مضامین

علم مثلث تحلیلی (حصہ دوم)

صفحہ	مضمون	پر
۱	سلسلہ قوت نما اور لوکارتمی سلسلے	۱
۱۰	اساس نوپر کے نوکارتم	
۱۶	دو ضروری انتہائی قیمتیں	
۲۲	مقادیر ملتف	۲
۲۴	ڈی مائیرے کا مسئلہ	
۲۶	ملتف مقادیر کے لئے مسئلہ نمائی	
۴۵	جب ن طہ حجم ن طہ اور مس ن طہ کی تفصیلیں	۳
۵۴	جب ع اور حجم ع کی تفصیلیں ع کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں	
۵۴	چھوٹے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام	
۵۸	کسی مساوات کی اہل کی تقریری قیمت	
۶۱	بظاہر غیر متعین مقادیر کی قیمت معلوم کرنا	
۷۵	جب ن طہ اور جب ن طہ کی تفصیلیں طہ کے اضلاع کی جیوب التمام اور جیوب میں	۴
۸۳	جب ن طہ اور حجم ن طہ کی تفصیلیں جب طہ اور حجم طہ کی صعودی اور نزولی قوتوں کے سلسلوں میں	

صفحہ نمبر	مضمون	صفحہ نمبر
۹۸	مقادیر ملتف کے لئے سلسلہ قوت نما	۵
۱۰۱	ملتف زاویوں کے لئے تفاعیل مستدیرہ	
۱۰۲	آئیلرہ کی قوت نا قیمتیں	
۱۰۵	زائدی تفاعیل	
۱۱۵	مقلوب و مستدیر تفاعیل	
۱۱۷	مقلوب زائدی تفاعیل	
۱۲۲	ملتف مقادیر کے لوکارٹم	۶
۱۳۱	لا کی تعریف جب لا اور لا ملتف ہوں	
۱۳۸	گرگیوری کا سلسلہ	۷
۱۴۱	۲ کی قیمت	
۱۴۶	سلسلوں کو جمع کرنا	۸
۱۶۲	سلسلوں میں پھیلا نا (تفصیلیں)	
۱۷۰	لا - ۲ لا جنم ط + ۱ کے اجزائے ضربی	۹
۱۷۷	لا - ۱ اور لا + ۱ کے اجزائے ضربی	
۱۸۸	جب ط اور جم ط کی تحلیل اجزائے ضربی میں	
۱۹۴	جنبر ط اور جنبر ط کے اجزائے ضربی لا تناسبی سلسلہ میں	
۲۰۷	اصول اجزائے تناسب	۱۰
۲۱۷	اغلاط مشاہدہ	۱۱
۲۲۸	متفرق مسائل	۱۲

صفحہ	مضمون	پاگہ
۲۲۸	مساوات درجہ سوم کا حل	
۲۳۰	اعظم اور اقل قیمتیں	
۲۳۵	مقاویہ طغی کی ہندسی تعبیر	
۲۴۰	شفرق مثالیں	
۲۴۲	جوابات	



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# حصہ دوم علم مثلث تحلیل باب اول سلسلہ قوت نما اور لوکار تھی سلسلے

۱۔ باب ہذا میں ہم جملہ لا کی تفصیل لا کی قوتوں میں معلوم کرینگے جہاں ۱ اور لا سے حقیقی متاویر مراد ہیں۔ اور نیز لو کو (۱ + لا) کی تفصیل دریافت کرینگے جہاں لا حقیقی ہے اور ایک سے کم ہے اور نو، ایک ایسی مقدار کو تعبیر کرتا ہے۔ جسکی تعریف آگے چل کر کی جائیگی۔

۲۔ مقدار (۱ +  $\frac{1}{n}$ ) کی قیمت معلوم کرو جب ن لا انتہا بڑھ جائے اور حقیقی ہو۔

چونکہ  $\frac{1}{n} > ۱$  اسلئے مسئلہ ثنائی سے



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{1}{n} \times n + 1 = \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n \\ & \dots + \frac{1}{3n} \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} + \\ & \quad \frac{\left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{1}{n} - 2 \right)}{3} + \frac{\frac{1}{n} - 1}{2} + 1 + 1 = \\ & \dots + \frac{\left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{1}{n} - 2 \right) \left( \frac{1}{n} - 3 \right)}{4} + \end{aligned}$$

یہ سلسلہ n کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے۔ خواہ یہ قیمتیں کتنی ہی بڑی کیوں نہ ہوں۔ پس اگر n کو غیر متناہی بنا دیا جائے تو بائیں جانب کا رکن

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \text{ "نالا متناہی"}$$

اسلئے جب n غیر متناہی ہو تو جملہ  $\left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n$  کی انتہائی قیمت ذیل کے سلسلہ کے حاصل جمع سے تعبیر ہوگی۔

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \text{ "نالا متناہی"}$$

اس سلسلہ کے حاصل جمع کو ہمیشہ علامت 'e' سے تعبیر کرتے ہیں

$$\text{اسلئے نہا } e = \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n$$

اس جگہ نہا  $e$  سے مراد  $\left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n$  کی انتہائی قیمت ہے

جب  $n$  لا انتہا بڑھ جائے  
نتیجہ صریح۔ اگر ہم  $n$  کی بجائے  $\frac{1}{m}$  لکھیں تو ظاہر ہے کہ جب  
 $n$  مائل بہ لا انتہا ہی ہو تو  $m$  صفر کے نہایت قریب ہو جائیگا اس لئے

$$m = (m+1)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} = (1 + \frac{1}{n})^n = n$$

۳۔ مقدار 'و' ایک تنہا ہی یا محدود مقدار ہے۔

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{2 \times 2} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{2 \times 2 \times 2} > \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots > 1$$

$$1 + \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} >$$

$$2 + 1 > 3$$

نیز صریحاً  $2 <$

اس لئے 'و' کی قیمت '۲' اور '۳' کے درمیان واقع ہوگی  
اگر ہم سلسلہ متذکرہ بالا کی رقوم کی کافی تعداد لیں تو انکو  
جمع کرنے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$2.5 < 1.82818285 \dots = w$$

۴۔ مقدار 'و' متبائن ہے

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ کیسی کسر  $\frac{p}{q}$  کے مساوی ہے۔ جہاں

ن اور ق کوئی صحیح اعداد ہیں۔

$$\text{تب } \frac{ن}{ق} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{ق} + \frac{1}{ق+1}$$

$$(1) \quad \dots + \frac{1}{ق+2} + \dots$$

مساوات بالا کے دونوں طرف  $ق$  سے ضرب دے دو۔ اس طرح

سے سلسلہ (۱) کی سب رقمیں صحیح اعداد بن جائیں گی بجز  $\frac{ق}{ق+1}$  کے اور اسکے بعد کی رقوم کے۔

$$\text{اس لئے } ن \times 1 - ق = \text{ایک صحیح عدد} + \frac{ق}{ق+1} + \frac{ق}{ق+2} + \dots + \frac{ق}{ق+ق}$$

$$\text{یعنی ایک صحیح عدد} = \frac{1}{ق} + \frac{1}{(ق+1)(ق+2)}$$

$$(2) \quad \dots + \frac{1}{(ق+1)(ق+2)(ق+3)} + \dots$$

لیکن اس مساوات کی بائیں جانب کا رکن  $\frac{1}{ق+1} <$  اور

$$> \frac{1}{ق+1} + \frac{1}{ق+2} + \frac{1}{ق+3} + \dots$$

$$\text{یعنی } > \frac{1}{ق+1} \left( 1 - \frac{1}{ق+1} \right)$$

یعنی  $\frac{1}{ق} > \frac{1}{ق+۱}$  لہذا مساوات (۲) کی بائیں جانب کے رکن کی قیمت  $\frac{1}{ق}$  اور  $\frac{1}{ق+۱}$  کے درمیان واقع ہے یعنی ایک کسر ہے اور اسلئے

بائیں جانب کے رکن کے مساوی نہیں ہو سکتی۔  
اس طرح سے 'و' کو متوافق فرض کرنا غلط ثابت ہوا۔

لہذا 'و' ایک متباہن مقدار ہے۔

۵۔ سلسلہ قوت نما، اگر لا' حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ

$$۱ = ۱ + لا + \frac{لا}{۲} + \frac{لا^۲}{۳} + \dots تا لا تناہی$$

اور نیز ثابت کرو کہ

$$۱ = ۱ + لا + لا کو + \frac{لا}{۲} (لوک و لا) + \dots تا لا تناہی$$

اگر لا ایک سے بڑا ہو تو

$$\left\{ \left( ۱ + \frac{۱}{ن} \right)^ن \right\} = \left( ۱ + \frac{۱}{ن} \right)^ن لا$$

$$= ۱ + ن لا + \frac{ن لا (ن لا - ۱)}{۲ \times ۱} \times \frac{۱}{ن} + \dots + \frac{ن لا (ن لا - ۱) (ن لا - ۲)}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{ن لا (ن لا - ۱) (ن لا - ۲) (ن لا - ۳)}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{ن لا (ن لا - ۱) (ن لا - ۲) (ن لا - ۳) (ن لا - ۴)}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۱}{۴} + \dots$$

اس جملہ میں فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑھ جاتا ہے  
تب دائیں جانب کا رکن حب دفعہ (۲) موٹا بن جاتا  
ہے اور بائیں جانب کا رکن

$$1 + لا + \frac{لا^2}{2!} + \frac{لا^3}{3!} + \dots \dots \dots \text{ہو جاتا ہے}$$

اسلئے

$$لوٹا = 1 + لا + \frac{لا^2}{2!} + \frac{لا^3}{3!} + \dots \dots \dots \text{تالا تناہی} \dots (۱)$$

فرض کرو کہ ۱ = وج یعنی ج = لوک و ۱  
پس سلسلہ (۱) میں لا کی بجائے ج لا لکھنے سے

$$لوٹا = وج = 1 + ج لا + \frac{ج لا^2}{2!} + \frac{ج لا^3}{3!} + \dots \dots \dots \text{تالا تناہی}$$

$$\therefore 1 = 1 + لا لوک و ۱ + \frac{لا^2}{2!} (\text{لوک و ۱})^2$$

$$+ \frac{لا^3}{3!} (\text{لوک و ۱})^3 + \dots \dots \dots \text{تالا تناہی} \dots (۲)$$

۴۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے (دیکھو سی سمتھ  
الجبرا دفعہ ۸، ۲) کہ دفعہ ماقبل کا سلسلہ (۱)، اور بائیں  
سلسلہ (۲) ہر دو لا کی حقیقی قیمتوں کے واسطے مستحق سلسلے

ہیں۔  
۷۔ مشق ۱۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots \dots \dots \text{تالا تناہی}$

دفعہ ۵ کی مساوات (۱) میں لاکے بجائے بالترتیب ۱ اور ۱- رکھنے سے

$$\begin{aligned} \text{قوة} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \text{تالانتا ہی} \\ \text{قوة} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \text{تالانتا ہی} \end{aligned}$$

پس علی تفریق سے

$$\text{قوة} - \text{قوة} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots) - (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots)$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{6} (\text{قوة} - \text{قوة}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{تالانتا ہی}$$

مشق ۲ - سلسلہ ذیل کو جمع کرو۔

$$1 + \frac{2+1}{2} + \frac{3+2+1}{3} + \frac{4+3+2+1}{4} + \dots \text{تالانتا ہی}$$

$$\text{ن ویں رقم} = \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{(1+n)n}{2n} = \frac{1+n}{2}$$

$$\left[ \frac{2}{1-n} + \frac{1}{2-n} \right] \frac{1}{2} = \left[ \frac{2+(1-n)}{1-n} \right] \frac{1}{2} = \frac{1+n}{1-n} \frac{1}{2} =$$

بشرطیکہ  $n < 2$

$$\left[ \frac{2}{2-n} + \frac{1}{3-n} \right] \frac{1}{2} = \text{اسی طرح سے } (1-n) \text{ ویں رقم}$$

$$\left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2} = \dots \text{چوتھی رقم}$$

$$\left[ \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \right] \frac{1}{2} = \dots \text{تیسری رقم}$$

$$\text{دوسری رقم} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{پہلی رقم} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \right]$$

پس کل جمع سے سلسلہ مذکور

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \times \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی} \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1}$$

۸۔ لوکارہی سلسلہ۔ اگر واقعی ہو اور تعداداً  $> 1$  تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک } (1+a) = 1 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^3 + \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$$

دفعہ کی مساوات ۲ میں فرض کرو کہ

$$1 + a = 1$$

$$\text{تب } (1+a)^1 = 1 + 1 \text{ لوک } (1+a)$$

$$+ \frac{1}{2} \{ \text{لوک } (1+a) \} + \dots \dots \dots (1)$$

لیکن واقعی ہے اور تعداداً ایک سے کم ہے

$$(1+1) = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{\infty} \quad (2)$$

چونکہ ما تعداداً کم ہے ایک سے، اسلئے

مساوات (۱) اور مساوات (۲) دونوں میں بائیں جانب کے سلسلے باہم مساوی ہونگے۔ اور نیز مستحق ہونگے۔ علاوہ ازیں یہ بھی آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر (۲) میں بائیں جانب کے سلسلہ کو لا کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جائے تو یہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔ لہذا ہم لا کی برابر قوتوں والی رقم کے سروں کو مساوی لکھ سکتے ہیں۔

اس طرح سے

$$\text{لوک } (1+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{\infty}$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{\infty} \quad \text{تالا تنہا ہی}$$

$$\text{بغیر لوک } (1+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{\infty} \quad \text{تالا تنہا ہی (۳)}$$

۹۔ اگر  $1 = 1$  تو دفعہ ماقبل کا سلسلہ

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots \quad \text{تالا تنہا ہی (جو صریحاً مستحق ہے)}$$

اگر  $1 = 1$  تو سلسلہ مذکور

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots \quad \text{تالا تنہا ہی (جو صریحاً متع ہے)}$$

لہذا یہ سلسلہ ما کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو ۱ اور ا کے درمیان ہوں درست ہوگا اور علاوہ ازیں اس حالت میں بھی درست رہے گا

جب  $1 = 1$



لیکن اگر  $n = 1$  - تو یہ سلسلہ دائیں جانب کے رکن کا مترادف نہ ہوگا -

۱۰۔ اساس کو پر کے لوکارتم معلوم کرو۔

مندرجہ بالا لوکارتمی سلسلہ میں فرض کرو کہ  $n = 1$  تب

$$\text{لوک } 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \dots \text{تالا تنہا ہی} \dots (1)$$

فرض کرو کہ  $n = 1$  تب

$$\text{لوک } 2 = 3 - \text{لوک } 1 = \frac{3}{2} = \text{لوک } 1 + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{لوک } 3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n-3} \times \frac{1}{n} + \dots (2)$$

فرض کرو کہ  $n = 1$  تب

$$\text{لوک } 4 = 3 - \text{لوک } 2 = 3 - \left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$\text{لوک } 5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n-3} \times \frac{1}{n} + \dots (3)$$

اگر ان مساواتوں کی رقوم کی کافی تعداد لی جائے تو ہم لوک ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ کی قیمتیں محسوس کر سکتے ہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ کافی درجہ تک درست نتائج حاصل کرنے کے واسطے سلسلہ بالا میں بہت زیادہ رقوم لینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ اسلئے ہم ایک زیادہ سہولت بخش سلسلہ معلوم کرتے ہیں۔

۱۱۔ دفعہ ۸ کی رو سے

لوک و (۱+ما) = ما -  $\frac{۲}{۳}$ ما +  $\frac{۳}{۳}$ ما -  $\frac{۴}{۳}$ ما + ..... (۱)

ما کی علامت تبدیل کرنے سے

لوک و (۱-ما) = -ما -  $\frac{۲}{۳}$ ما -  $\frac{۳}{۳}$ ما +  $\frac{۴}{۳}$ ما - ..... (۲)

ان دونوں سلسلوں کے درست ہونیکے لئے لازمی ہے -

کہ ما کی قیمت تعداداً ایک سے کم ہو -

عمل تفریق سے

لوک و (۱+ما) - لوک و (۱-ما) = لوک و  $\frac{ما+۱}{ما-۱}$

(۳) .....  $\left[ ..... + \frac{۵}{۵}ما + \frac{۳}{۳}ما + ما \right]^۲ =$

فرض کرو کہ ما =  $\frac{م-ن}{م+ن}$  جہاں م اور ن دونوں صحیح

اعداد ہیں

اور م < ن

پس  $\frac{م}{ن} = \frac{ما+۱}{ما-۱}$

تب مساوات (۳) حسب ذیل ہو جائے گی

لوک و  $\frac{م}{ن} = \left[ \left( \frac{م-ن}{م+ن} \right)^۲ + \frac{۱}{۳} \left( \frac{م-ن}{م+ن} \right) + \frac{۳}{۳} \left( \frac{م-ن}{م+ن} \right) + \left( \frac{م-ن}{م+ن} \right) \right]^۲$

(۴) .....  $\left[ ..... + \frac{۵}{۵} \left( \frac{م-ن}{م+ن} \right) + \right.$



مقصود ہو تو اس عدد کا جو لوکارتم اساس تو پر ہو اس کو مقدار ..... ۸۴۲۹۳۴۷ سے ضرب دیتے ہیں اس کسرا عشاریہ کو ضارب معین کہتے ہیں اور بالعموم 'مب' سے تعبیر کرتے ہیں۔

## امثلہ ۱

ثابت کر دو کہ

$$(۱) \quad \frac{1}{2} = (1 + 0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$(۲) \quad 1 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) = 1$$

$$(۳) \quad 1 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) = 1$$

$$(۴) \quad \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$(۵) \quad \frac{7}{8} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$(۶) \quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}$$

$$(۷) \quad 5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

ذیل کے سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

$$(۸) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$(9) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots \dots \dots \text{تا لانتہائی}$$

ثبات کرو کہ

$$(10) \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

لوک و ۱ - لوک و ۲

$$(11) \quad \text{لوک و } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots \text{تا لانتہائی} = \frac{1}{2}$$

$$(12) \quad \text{لوک و } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots \text{تا لانتہائی} = \frac{1}{2}$$

اگر لا < 1

$$(13) \quad \text{لوک و } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots \text{تا لانتہائی} = \frac{1}{2}$$

$$\dots \dots \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots \dots \dots$$

بشرطیکہ لا بڑا نہ ہو و ۱ سے

$$(14) \quad \text{لوک و } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots \text{تا لانتہائی} = \frac{1}{2}$$

$$\dots \dots \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots \dots \dots \text{اگر لا < 1}$$

$$(15) \quad \text{لوک و } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots \text{تا لانتہائی} = \frac{1}{2}$$

$$(16) \quad \text{لوک و } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots \text{تا لانتہائی} = \frac{1}{2}$$

تا لانتہائی

$$(17) \quad \text{لوک و } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots \text{تا لانتہائی} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \text{لوک و } \frac{(\frac{n}{2} - \text{طہ})}{(\frac{n}{2} + \text{طہ})} \text{ اگر طہ} > \frac{n}{2}$$



اور لوکب  $۳ = ۱۲ \dots\dots = ۳۷$

(۲۳) معنی  $۱ =$  لوکب کو مرتسم کرو

[اگر لا منفی ہو تو ماحینالی ہوگا۔ جب لا صفر کے مساوی ہو تو

$۱ = ۰$  جب لا  $۱ =$  تو ماحین کی قیمت صفر ہوگی۔ جب لا مثبت ہو اور ایک

سے بڑا ہو تو ماحینہ مثبت رہیگا۔ جب لا لا متناہی ہو تو ماحین لا متناہی ہوگا]

(۲۴) معنی  $۱ =$  لوکب کو مرتسم کرو۔ اس کا اور گوشہ مشق کے

معنی کھیند سی ربط معلوم کرو [دفعہ ۱۵۳ حصہ اول کو استعمال کرو]

(۲۵) معنی  $۱ =$  لا کو مرتسم کرو۔

۱۳۔ اگلے باب میں ذیل کی دو انتہائی قیمتوں کے استعمال

کی ضرورت واقع ہوگی۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ (جم ع) کی انتہائی قیمت

ایک ہو جاتی ہے جب  $n$  لا انتہا

بڑھ جائے۔

جم ع (۱۔ جب ع)

۱۴۔ (جم ع) = (۱۔ جب ع) = (۱۔ جب ع) = (۱۔ جب ع)

اب (۱۔ جب ع) کی بجائے فرض کرنے سے

نہا {۱۔ جب ع} = نہا {۱+م} = ۱ = ۰ ..... [نتیجہ صریح دفعہ ۱۵۳]

نیز از روئے دفعہ ۳۴۳ ( حصہ اول )

$$\frac{ن}{۲} \text{ جب } \frac{ع}{ن} \\ \left[ \frac{ن}{۲} \times \left( \frac{ع}{ن} \right) = ۰ \times ۱ = ۰ \right] \text{ بشرطیکہ } ن = \infty$$

پس جب ن مائل بہ لانتنا ہی ہو تو

$$\left[ \text{جم } \frac{ع}{ن} \right] = ۱ = نو$$

متبادل ثبوت - لوکارہتی سلسلہ کے استعمال سے بھی یہی انتہائی قیمت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے کیونکہ (جم  $\frac{ع}{ن}$ ) کوئی کے مساوی فرض کرنے سے

$$\text{لوک } ۱ = ن \text{ لوک } و \text{ جم } \frac{ع}{ن} = \frac{ن}{۲} \text{ لوک } و \text{ جم } \frac{ع}{ن} \\ = \frac{ن}{۲} \text{ لوک } و (۱ - \text{جب } \frac{ع}{ن})$$

$$= \frac{ن}{۲} (\text{جب } \frac{ع}{ن} + \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{ع}{ن} + \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{ع}{ن} + \dots)$$

..... دفعہ ۸

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ بلحاظ قیمت کے (جب  $\frac{ع}{ن}$ ) اور

سلسلہ (جب  $\frac{ع}{ن}$  + جب  $\frac{ع}{ن}$  + جب  $\frac{ع}{ن}$  + .... تا لانتنا ہی) کے

درمیان واقع ہوتا ہے -



یعنی سلسلہ جب<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup> اور جب<sup>۲</sup> ن<sup>۲</sup> کے درمیان واقع ہوتا ہے  
۱۔ جب<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup>

یعنی جب<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup> اور مس<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup> کے درمیان واقع ہوتا ہے

لہذا (۔ لوک ی) ذیل کی دو رقوم کے درمیان واقع ہوگا۔  
ن<sup>۲</sup> جب<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup> اور ن<sup>۲</sup> مس<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup> ..... (۱)

لیکن

$$ن<sup>۲</sup> جب<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup> = ن<sup>۲</sup> (جب<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup>) = ن<sup>۲</sup> × ع<sup>۲</sup> = ۰ × ۱ = ۰$$

$$اور ن<sup>۲</sup> مس<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup> = ن<sup>۲</sup> (جب<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup>) = ن<sup>۲</sup> × ع<sup>۲</sup> = ۱ × ۰ = ۰$$

$$۰ = ۰ × ۱ × ۱ = دفعہ ۲۳ حصہ اول$$

اس سے معلوم ہوا کہ (۱) کی دونوں مقداروں کی انتہائی قیمت صفر ہے

پس لو کہ شی بھی صفر ہوگا، یعنی ی = ۱

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر ن لا انتہا بڑھ جائے تو (جب<sup>۲</sup> ع<sup>۲</sup>)

کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے۔

دفعہ ۲۳۳ حصہ اول میں بتایا جا چکا ہے کہ جب طہ ' طہ ' اور مس طہ بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہوتے ہیں۔  
 بنا برین جب  $\frac{ع}{ن}$ ،  $\frac{ع}{ن}$  اور مس  $\frac{ع}{ن}$  بھی صعودی ترتیب میں ہیں۔

اسلئے '  $\frac{ع}{ن}$ ،  $\frac{ع}{ن}$ ،  $\frac{ع}{ن}$  بھی صعودی ترتیب میں ہیں۔  
 جب  $\frac{ع}{ن}$ ،  $\frac{ع}{ن}$ ،  $\frac{ع}{ن}$  جم  $\frac{ع}{ن}$

پس  $\left(\frac{ع}{ن}\right)$  کی قیمت ' اور  $\left(\frac{ع}{ن}\right)$  کے

درمیان واقع ہوگی یعنی  $\left(\frac{ع}{ن}\right)$  اور  $\left(\frac{ع}{ن}\right)$  کے درمیان واقع ہوگا

لیکن دفعہ گزشتہ کی رو سے اگر ن لانتہا بڑھ جائے تو  $\left(\frac{ع}{ن}\right)$  کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے

اسلئے جب ن لانتہا بڑھ جائے تو  $\left(\frac{ع}{ن}\right)$  کی انتہائی قیمت ایک کے نہایت قریب ہوگی

۱۹ - دفعہ ۲ میں ایک بات غور طلب ہے -

ہیں زیادہ موثق طور پر یہ ثابت کرنا چاہیے کہ اگر ن لانتہا ہی ہو تو فی الحقیقت مساوات (۱) کی بائیں جانب کے سلسلہ کی قیمت سلسلہ (۲) کے



بالفاظ دیگر  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  تا لامتناہی

اور  $[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  تا لامتناہی

$-\frac{1}{2}]$  کے درمیان واقع ہوگی

اب بموجب دفعہ ۶ سلسلہ  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  تا لامتناہی

مصدق ہے۔ اسلئے مقدار  $\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots)$  کی قیمت

صفر ہو جائے گی جب نائل بہ لامتناہی ہو

اسلئے بالآخر دفعہ (۲) کا سلسلہ (۱) انتہائی صورت میں ذیل

کا سلسلہ بن جائے گا۔

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  تا لامتناہی

اسی قسم کا استدلال دفعہ ۵ کے سلسلوں اور نیز دفعات

۳۲، ۳۳ کے سلسلوں پر بھی صادق آئیگا۔

# باب دوم

## ملتف مقداریں

### ڈمی مائرے کا مسئلہ

۷۱۔ ملتف مقداریں اگر لا اور ما دونوں حقیقی ہوں تو مقدار لا + ما - ۱ کو مقدار ملتف کہتے ہیں۔ لہذا ثابت ہوا کہ ملتف مقدار ایسی دور قوم کے حاصل جمع پر مشتمل ہوتی ہے۔ جن میں سے ایک رقم بالتمام حقیقی ہوتی ہے اور دوسری بالتمام غیر حقیقی (یعنی خیالی)

۱۸۔ ہم ایک ملتف مقدار کو ہمیشہ  $r$  (جسم طہ + ۱ - جب طہ) کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ جہاں  $r$  اور طہ دونوں حقیقی ہیں۔

فرض کرو کہ لا + ما - ۱ =  $r$  (جسم طہ + ۱ - جب طہ)

$$= r \text{ جسم طہ} + ۱ - \text{رجب طہ}$$

مساوات بالا کے دونوں جانب کے حقیقی اور غیر خیالی حصوں کو الگ الگ مساوی کرنے سے

رجب طہ = لا ----- (۱)

اور رجب طہ = ما ..... (۲)

اور ان کے مربعوں کو باہم جمع کرنے سے

$$ر^2 = لا^2 + ما^2 \text{ یعنی } ر = \sqrt{لا^2 + ما^2}$$

رواجاً جذر ہذا کی علامت مثبت لیتے ہیں۔ پس ر کی قیمت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے۔

تب (۱) اور (۲) سے

$$\frac{لا}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} = \text{رجب طہ} \text{ اور } \frac{ما}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} = \text{رجب طہ}$$

لا اور ما کی قیمتیں خواہ کچھ ہی کیوں نہ ہوں، + ۱ اور - ۱ کے درمیان طہ کی ایک اور صرف ایک ہی قیمت ہوگی جو اوپر کی دونوں مساواتوں کو پورا کرے گی۔

پس ثابت ہوا کہ مقدار لا + ما - ۱ ہمیشہ (رجب طہ + ما - ۱) جب طہ کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

تعریف - مقدار + ما - ۱ کو متذکرہ بالا ملتف مقدار کا مقیاس کہتے ہیں اور طہ کی وہ قیمت جو - ۱ اور

+ ۱ کے درمیان واقع ہو اور ہر دو روا بط

$$\text{رجب طہ} = \frac{لا}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} \text{ اور جب طہ} = \frac{ما}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} \text{ کو پورا کرے}$$

جملہ لا + ما - آ + ما کی سمت کی خاص قیمت کہلاتی ہے

۱۹ - مشتق ۱ - مقدار ۱ + ما - آ کو مذکورہ بالا شکل میں ظاہر کرو

یہاں ۱ + ما - آ = ر (جم طہ + ما - آ جب طہ)

جس سے ر جم طہ = ۱

ر جب طہ = ۱

پس ر = ۱ + ما - آ = ۲ ما

لہذا جم طہ =  $\frac{1}{2\text{ما}}$  اور جب طہ =  $\frac{1}{2\text{ما}}$

یعنی طہ =  $\frac{1}{2\text{ما}}$

اس لئے ۱ + ما - آ = ۲ ما [جم  $\frac{1}{2\text{ما}}$  + ما - آ جب  $\frac{1}{2\text{ما}}$ ]

پس رقم مذکورہ کا مقیاس ما آ ہے اور اس کی سمت کی خاص قیمت  $\frac{1}{2\text{ما}}$  ہے۔

مشتق ۲ - رقم ۱ - ما - آ + ۳ کو مذکورہ بالا شکل میں منتقل کرو۔

اس جگہ ۱ - ما - آ + ۳ = ر (جم طہ + ما - آ جب طہ)

پس ر جم طہ = ۱ - اور ر جب طہ = ۳ ما

∴ ر = ۱ + ما - آ + ۳ = ۲

لہذا جم طہ =  $\frac{1}{2}$  اور جب طہ =  $\frac{3}{2\text{ما}}$

یعنی طہ =  $\frac{3}{2\text{ما}}$

$$\therefore 1 - 1 - 1 = 3 - 1 = 2 \left[ \text{جم } \frac{112}{3} + 1 - 1 \text{ جب } \frac{112}{3} \right]$$

مشق ۳۰ - مقدار ۱ - ۱ - ۳ کو مذکورہ بالا شکل میں لادو۔

یہاں رجم طہ = ۱ - اور رجب طہ = ۳ -

پس  $1 - 1 - 1 = 3 - 1 = 2$  لہذا رجم طہ =  $\frac{1}{3}$  اور رجب طہ =  $\frac{112}{3}$  چونکہ ہم طہ کے لئے ایسی قیمت منتخب کرتے ہیں جو ۱۱ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہو اسلئے طہ =  $\frac{112}{3}$

$$\therefore 1 - 1 - 1 = 3 - 1 = 2 \left[ \text{جم } \left( \frac{112}{3} \right) + 1 - 1 \text{ جب } \left( \frac{112}{3} \right) \right]$$

۳۰ - دفعہ ۱۸ کی مساواتیں

$$\text{رجم طہ} = \frac{1}{1 + 1 + 1} \text{ اور رجب طہ} = \frac{112}{1 + 1 + 1}$$

طہ کی ایک سے زیادہ قیمتوں سے پوری ہوتی ہیں۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ کسی زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی قیمتوں میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جب اس زاویہ میں ۱۱ کے کسی ضعف کا اضافہ کر دیا جائے۔

پس اگر طہ سے ایسی قیمت مراد لی جائے جو ۱۱ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہو۔ اور مذکورہ بالا رواج کو پورا کرے تو وہ سب زدایا بھی جو ۱۱ ن ۱۱ + طہ سے تعبیر کئے جاسکتے ہیں رواج مذکورہ کو پورا کرینگے۔ یا بالفاظ دیگر ہم یوں کہہ سکتے ہیں۔



کہ ایک ملحق مقدار کی سعت کثیر القیمت ہوتی ہے اور سعت کی خاص قیمت سے اس کی وہ قیمت مراد ہوتی ہے جو  $n+1$  اور  $n$  کے درمیان واقع ہو۔ اس جگہ سے کوئی صحیح عدد مراد ہے اگر ہم طہ کی خاص قیمت میں  $n+1$  کا کوئی ضیف جمع کر دیں۔ تو اس کی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت حاصل ہوگی خلاصہ یہ ہے کہ

اگر طہ سے ایسا زاویہ مراد ہو جو  $n$  اور  $n+1$  کے درمیان واقع ہو اور ذیل کی دونوں مساواتوں

$$\frac{لا}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} = \text{جہ طہ}$$

(۱)

$$\frac{ما}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} = \text{جب طہ}$$

کو پورا کرے

تو  $لا + ما - ۱ = \sqrt{لا^2 + ما^2}$  [جہ  $(n+1) طہ + (ن+۱) ما - ۱ = \sqrt{لا^2 + ما^2}$ ] مقدار  $n+1 طہ$  کو سعت اور طہ کو اس سعت کی خاص قیمت کہتے ہیں۔

اختصار کی غرض سے مساوات (۱) کو بالعموم  $\frac{ما}{لا} = \text{سہ}$  یعنی  $طہ = \text{سہ} \times \frac{لا}{ما}$  کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ لیکن یہ یاد رہے کہ یہاں طہ سے مراد صرف وہ زاویہ ہے جو ہر دو مساواتات

(۱) کو پورا کرتا ہے۔

۲۱۔ ڈی ماٹرے کا مسئلہ۔ ن کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو مثبت ہو یا منفی، صحیح عدد ہو یا مکسور اہر حالت میں

(جہ ط + ا-ا جب ط) ن

کی قیمت یا اسکی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت

(جہ ن ط + ا-ا جب ن ط) ہوگی

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تب عمل ضرب سے

(جہ ع + ا-ا جب ع) (جہ ب + ا-ا جب ب)

= جہ ع جہ ب - جب ع جب ب + ا-ا [جب ع جہ ب + جہ ع جب ب]

= جہ (ع + ب) + ا-ا جب (ع + ب)

اسی طرح سے (جہ ع + ا-ا جب ع) (جہ ب + ا-ا جب ب) (جہ ج + ا-ا جب ج)

= [جہ (ع + ب) + ا-ا جب (ع + ب)] [جہ ج + ا-ا جب ج]

= جہ (ع + ب) جہ ج - جب (ع + ب) جب ج

+ ا-ا [جب (ع + ب) جہ ج + جہ (ع + ب) جب ج]

= جہ (ع + ب + ج) + ا-ا جب (ع + ب + ج)

ظاہر ہے کہ ہم جہاں تک چاہیں اس عمل کو وسعت دے سکتے ہیں۔

لہذا (جم ع + م-ا جب ع) (جم ب + م-ا جب ب)

x (جم ج + م-ا جب ج) ..... ن اجزاء ضربی تک

= جم (ع + ب + ج + ..... ن رقوم تک)

+ م-ا جب (ع + ب + ج + ..... ن رقوم تک)

اس میں ع = ب = ج = ..... = ط رکھنے سے

(جم ط + م-ا جب ط) = جم ن ط + م-ا جب ن ط

صورت دوم - فرض کرو کہ ن ایک منفی صحیح عدد ہے۔  
اور - م کے برابر ہے۔ قوت ثاؤں کے معمولی ضوابط کے  
بوجب

(جم ط + م-ا جب ط) = (جم ط + م-ا جب ط) ۲

جسابق  
= (جم ط + م-ا جب ط) ۱ = (جم ط + م-ا جب ط) ۲

جم م ط - م-ا جب م ط

= (جم م ط - م-ا جب م ط) (جم م ط - م-ا جب م ط)

$$\frac{\text{جہم م ط} - \text{ا-ا جب م ط}}{\text{جہم م ط} + \text{جب م ط}} =$$

$$= \text{جہم م ط} - \text{ا-ا جب م ط}$$

$$= \text{جہم} (-\text{م}) \text{ ط} + \text{ا-ا جب} (-\text{م}) \text{ ط}$$

$$= \text{جہم ن ط} + \text{ا-ا جب ن ط}$$

صورت سوم - فرض کرو کہ ن ایک کسر  $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$  کے مساوی ہے جہاں ق سے کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے اور ف کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔  
گزشتہ صورتوں کی رو سے (جہم  $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$  + ا-ا جب  $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ )

$$= \text{جہم} \frac{\text{ط}}{\text{ق}} \times \text{ق} + \text{ا-ا جب} \frac{\text{ط}}{\text{ق}} \times \text{ق} = \text{جہم ط} + \text{ا-ا جب ط}$$

اسلئے جہم  $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$  + ا-ا جب  $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$  ایک ایسی رقم ہے جسکی ق دیں قوت جہم ط + ا-ا جب ط ہے۔

لہذا جہم ط + ا-ا جب ط کے ق دیں جذروں میں سے

ایک جذر جہم  $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$  + ا-ا جب  $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$  ہے۔

یعنی (جہم ط + ا-ا جب ط)  $\frac{1}{\text{ق}}$  کی ق قیمتوں میں سے ایک

قیمت جم ط ق + م-ا جب ط ق ہے ان دونوں رقوم میں

سے ہر ایک کی ف دیں قوت لو۔ تب ظاہر ہے کہ

(جم ط + م-ا جب ط)  $\frac{3}{4}$  کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

(جم ط ق + م-ا جب ط ق) ف

یعنی جم ف ق + م-ا جب ف ق ہے

۴۲۔ بالعموم م-ا کو حرف خ سے یا اختصاراً خ سے تبسیر کیا جاتا ہے۔ اور بعد ازیں یہی طریق کتابت قائم رکھا جائے گا۔

اس لئے جم ط + خ جب ط سے مراد جم ط + م-ا جب ط ہوگی مشق ۱۔ اختصار کرو

$$\frac{(\text{جم } ۳ \text{ ط} + \text{خ جب } ۳ \text{ ط})^۵ (\text{جم } ۲ \text{ ط} - \text{خ جب } ۲ \text{ ط})^۲}{(\text{جم } ۵ \text{ ط} + \text{خ جب } ۵ \text{ ط})^۴ (\text{جم } ۲ \text{ ط} - \text{خ جب } ۲ \text{ ط})^۵}$$

ظاہر ہے کہ (جم ۳ ط + خ جب ۳ ط) = (جم ۲ ط + خ جب ۲ ط)

اور جم ط - خ جب ط = جم (- ط) + خ جب (- ط) = (جم ط + خ جب ط)

نیز (جم ۵ ط + خ جب ۵ ط) = (جم ط + خ جب ط)

اور جم ۲ ط - خ جب ۲ ط = جم (- ط) + خ جب (- ط)

$$= (\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^2$$

پس مذکورہ بالا رقم

$$= \frac{(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{15} (\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^3}{(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{35} (\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{10}}$$

$$= (\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{13} = \text{جم ۱۳ ط} - \text{خ جب ۱۳ ط}$$

مشق ۲۔ اگر ۲ جم ط = لا + ۱/۲ اور ۲ جم ذ = ما + ۱/۲ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا مان} + \frac{1}{\text{لا مان}} \text{ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت}$$

$$۲ \text{ جم } (\text{م ط} + \text{ن ذ}) \text{ ہوگی}$$

$$\text{ظاہر ہے کہ لا}^2 - ۲ \text{ لا جم ط} = ۱ -$$

$$\therefore (\text{لا} - \text{جم ط})^2 = ۱ - ۲ \text{ جم ط} = - \text{جم ط} = - \text{جب ط}$$

$$\therefore \text{لا} = \text{جم ط} + \text{خ جب ط}$$

$$\text{یعنی لا}^2 = \text{جم م ط} + \text{خ جب م ط}$$

$$\text{اور } \frac{1}{\text{لا}} = \text{جم م ط} - \text{خ جب م ط}$$

$$\text{اسی طرح سے ما} = \text{جم ذ} + \text{خ جب ذ}$$

$$\text{یعنی مان}^2 = \text{جم ن ذ} + \text{خ جب ن ذ}$$

$$\text{اور } \frac{1}{\text{مان}} = \text{جم ن ذ} - \text{خ جب ن ذ}$$

$$\therefore \text{لا مان} + \frac{1}{\text{لا مان}} = (\text{جم م ط} + \text{خ جب م ط}) + (\text{جم ن ذ} + \text{خ جب ن ذ})$$

$$+ (\text{جم م ط} - \text{خ جب م ط}) + (\text{جم ن ذ} - \text{خ جب ن ذ})$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{جم (م ط + ن ذ)} + \text{خ جب (م ط + ن ذ)} \\
 &+ \text{جم (م ط + ن ذ)} - \text{خ جب (م ط + ن ذ)} \\
 &= ۲ \text{ جم (م ط + ن ذ)}
 \end{aligned}$$

اسی طرح سے یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{۲۱}{۲۱} + \frac{۲۱}{۲۱}$$

کی ایک قیمت ۲ جم (م ط - ن ذ) ہوگی  
**مشق ۳ -** اگر جب ع + جب ی + جب ج = جم ع + جم ی + جم ج =  
 تو ثابت کرو کہ

جم ۳ ع + جم ۳ ی + جم ۳ ج = ۳ جم (ع + ی + ج)  
 اور جب ۳ ع + جب ۳ ی + جب ۳ ج = ۳ جب (ع + ی + ج)  
 علم مثلث میں بہت سی ایسی مثال مساواتیں ہیں جو الجبرا کی مثال مساواتوں  
 سے اخذ کی گئی ہیں۔ مشق ۱ ایسی مساواتوں کی ایک مثال ہے۔

ہم کو الجبرا سے معلوم ہے کہ اگر ۱ + ب + ج = ۰

$$تو ۱ + ۲ ب + ۳ ج = ۱۳ ب ج$$

فرض کرو کہ ۱ = جم ع + خ جب ع

$$ب = جم ی + خ جب ی$$

$$ج = جم ج + خ جب ج$$

چونکہ ۱ + ب + ج = ۰

∴ (جم ع + خ جب ع) + (جم ب + خ جب ب) + (جم ج + خ جب ج)  
 = ۳ (جم ع + خ جب ع) (جم ب + خ جب ب) (جم ج + خ جب ج)  
 یعنی ڈیٹائیٹ کے مسئلہ سے

(جم ۳ ع + جم ۳ ب + جم ۳ ج) + (جم ۳ ع + جم ۳ ب + جم ۳ ج)  
 = ۳ (جم ع + جم ب + جم ج) + ۳ (خ جب ع + خ جب ب + خ جب ج)  
 حقیقی حصوں کو آپس میں اور خیالی حصوں کو آپس میں الگ الگ برابر  
 کرنے سے نتائج مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

## امثلہ ۲

ذیل کی رقوم کو ر (جم ط + خ جب ط) کی شکل میں منتقل کرو۔

(۱) ۱ + خ (۲) ۱ - خ (۳) ۳ - ۲ + خ  
 (۴) ۳ + ۲ + خ (۵) ۱ + ۲ + خ (۶) ۲ - ۲ + خ  
 اختصار کرو۔

(۷)  $\frac{(جم ط - خ جب ط)}{(جم ع + خ جب ع)}$  (۸)  $\frac{(جم ب + خ جب ب)}{(جم ج + خ جب ج)}$   
 (۹)  $\frac{(جم ۲ ط - خ جب ۲ ط)}{(جم ۳ ط + خ جب ۳ ط)}$  (۱۰)  $\frac{(جم ۴ ط - خ جب ۴ ط)}{(جم ۵ ط + خ جب ۵ ط)}$   
 (۱۱)  $\frac{(جم ع + خ جب ع)}{(جم ب + خ جب ب)}$



$$= \text{جم (م ط + ن ذ)} + \text{خ جب (م ط + ن ذ)} \\ + \text{جم (م ط + ن ذ)} - \text{خ جب (م ط + ن ذ)} \\ = ۲ \text{ جم (م ط + ن ذ)}$$

اسی طرح سے یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{۲۱}{۲۱} + \frac{۲۱}{۲۱}$$

کی ایک قیمت ۲ جم (م ط - ن ذ) ہوگی  
مشق ۳ - اگر جب ع + جب ی + جب ج = جم ع + جم ی + جم ج = ۰  
تو ثابت کرو کہ

جم ۳ ع + جم ۳ ی + جم ۳ ج = ۳ جم (ع + ی + ج)  
اور جب ۳ ع + جب ۳ ی + جب ۳ ج = ۳ جب (ع + ی + ج)  
علم مثلث میں بہت سی ایسی مثال مساواتیں ہیں جو الجبر کی مثال مساواتوں  
سے اخذ کی گئی ہیں۔ مشق ۴ ایسی مساواتوں کی ایک مثال ہے۔

ہم کو الجبر سے معلوم ہے کہ اگر ۱ + ب + ج = ۰

$$\text{تو } ۱ + ۲ب + ۳ج = ۱ + ۳ب + ۳ج$$

فرض کرو کہ ۱ = جم ع + خ جب ع

ب = جم ی + خ جب ی

ج = جم ج + خ جب ج

چونکہ ۱ + ب + ج = ۰

∴ (جم ع + خ جب ع) + (جم ب + خ جب ب) + (جم ج + خ جب ج)  
 = ۳ (جم ع + خ جب ع) (جم ب + خ جب ب) (جم ج + خ جب ج)  
 یعنی ڈیٹائیٹ کے مسئلہ سے

(جم ۳ ع + جم ۳ ب + جم ۳ ج) + (جم ۳ ع + جم ۳ ب + جم ۳ ج)  
 = ۳ (جم ع + جم ب + جم ج) + ۳ (خ جب ع + خ جب ب + خ جب ج)  
 حقیقی حصوں کو آپس میں اور خیالی حصوں کو آپس میں الگ الگ برابر  
 کرنے سے نتائج مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

## امثلہ ۲

ذیل کی رقوم کو ر (جم ط + خ جب ط) کی شکل میں منتقل کرو۔

(۱) ۱ + خ (۲) ۱ - خ (۳) ۱ - ۲ + خ  
 (۴) ۳ + ۴ + خ (۵) ۱ + ۲ + خ (۶) ۲ - ۲ + خ  
 اختصار کرو۔

(۷) (جم ط - خ جب ط) (۸) (جم ع + خ جب ع) (۹) (جم ب + خ جب ب)  
 (۱۰) (جم ج + خ جب ج) (۱۱) (جم ع + خ جب ع) (۱۲) (جم ب + خ جب ب)  
 (۱۳) (جم ج + خ جب ج) (۱۴) (جم ع + خ جب ع) (۱۵) (جم ب + خ جب ب)  
 (۱۶) (جم ج + خ جب ج) (۱۷) (جم ع + خ جب ع) (۱۸) (جم ب + خ جب ب)  
 (۱۹) (جم ج + خ جب ج) (۲۰) (جم ع + خ جب ع) (۲۱) (جم ب + خ جب ب)  
 (۲۲) (جم ج + خ جب ج) (۲۳) (جم ع + خ جب ع) (۲۴) (جم ب + خ جب ب)  
 (۲۵) (جم ج + خ جب ج) (۲۶) (جم ع + خ جب ع) (۲۷) (جم ب + خ جب ب)  
 (۲۸) (جم ج + خ جب ج) (۲۹) (جم ع + خ جب ع) (۳۰) (جم ب + خ جب ب)

$$(۱۲) \left\{ (جہ ط - جہ ذ) + (جہ ط - جہ ذ) \right\}^{\text{ن}}$$

$$+ \left\{ (جہ ط - جہ ذ) - (جہ ط - جہ ذ) \right\}^{\text{ن}}$$

(۱۳) ثابت کر دو کہ

$$(جہ لا + جہ لا) = جہ ن (لا - \frac{n}{2}) + جہ ن (ن - \frac{n}{2}) (لا)$$

$$\text{اور } \left( \frac{جہ ن + جہ ن}{جہ ن - جہ ن} \right) = جہ ن (ن - \frac{n}{2})$$

$$+ جہ ن (ن - \frac{n}{2})$$

$$\text{اگر جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع}$$

$$\text{اور جہ ل + جہ ل + جہ ل + جہ ل + جہ ل + جہ ل + جہ ل + جہ ل + جہ ل + جہ ل}$$

$$\text{بالترتیب (لا، ی اور ع) رکھے جائیں۔ تو ثابت کر دو کہ}$$

$$(لا + ی) (ی + ع) = جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع$$

$$\left[ جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع \right]$$

$$15 \frac{1}{2} = \frac{1}{(ی - ع)} = \frac{1}{2} \text{ تم } ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع$$

$$\left[ جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع \right]$$

$$16 - لا + ی = جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع - جہ ع$$

$$\left[ جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع + جہ ع \right] \times$$

۱۶ مساوات متماثلہ

$$(۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱) = (۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱) + (۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱)$$

میں لاکے بجائے جم ۷ + خر جب ۷ اور اسی طرح ب، ج، د کی بجائے متشابه رقوم لکھ کر ذیل کی مساوات متاثر ثابت کرو

$$\text{جب (۷-۱) جب (۷-۱) = جب (۷-۱) جب (۷-۱) جب (۷-۱) + جب (۷-۱) جب (۷-۱) جب (۷-۱)}$$

۱۸ - مساوات متاثر

$$\frac{(۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱)}{(۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱)} = \frac{(۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱)}{(۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱)} + \frac{(۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱)}{(۱۰-۱) (ب-۱) (ج-۱)}$$

میں لاکے بجائے جم ۲ + خر جب ۲ ط اور اسی طرح ا، ب، اور ج کی بجائے متشابه رقوم لکھ کر ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب (۲-۱) جب (۲-۱) جب (۲-۱)}}{\text{جب (۲-۱) جب (۲-۱) جب (۲-۱)}} = \frac{\text{جب (۲-۱) جب (۲-۱) جب (۲-۱)}}{\text{جب (۲-۱) جب (۲-۱) جب (۲-۱)}} + \frac{\text{جب (۲-۱) جب (۲-۱) جب (۲-۱)}}{\text{جب (۲-۱) جب (۲-۱) جب (۲-۱)}}$$

سے متاثر مساواتیں مستنبط کرو

۱۹ - ثابت کرو کہ

$$(۱+۱) (ب-۱) (ج-۱) + (۱+۱) (ب-۱) (ج-۱) = (۱+۱) (ب-۱) (ج-۱) (جم ۲)$$

$$۲۰ - اگر ۲ جم ط = لا + ۱ تو ثابت کرو کہ ۲ جم ط = لا + ۱$$

۲۱۔ اگر ۲ جم ط = لا +  $\frac{1}{ق}$  اور ۲ جم ذ = ما +  $\frac{1}{ق}$  .....'

تو ثابت کرو کہ ۲ جم (ط + ذ + ..... ) = لا ما ی + .....  $\frac{1}{ق}$

۲۲۔ اگر لا = جم  $\frac{۱۱}{۲۲}$  + ما - ۱ جب  $\frac{۱۱}{۲۲}$  تو ثابت کرو کہ

$$لا \times لا \times لا \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی} = \text{جم } ۱۱$$

۲۳۔ ڈی مائرے کے مسئلہ کو استعمال کر کے ذیل کی مساوات کو حل کرو

$$لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ - لا + ۱ = ۰$$

۲۴۔ دفعہ ۲۱ میں ہم نے صرف یہ ثابت کیا ہے کہ

$$\text{جم } \frac{ط}{ق} + ما - ۱ \text{ جب } \frac{ط}{ق}$$

جملہ (جم ط + ما - ۱ جب ط)  $\frac{1}{ق}$  کی قیمتوں میں سے صرف ایک قیمت رہے باقی قیمتیں بھی آسانی سے دریافت ہو سکتی ہیں۔

$$(\text{جم ط} + ما - ۱ \text{ جب ط}) \frac{1}{ق} = \{ \text{جم } (۲ن + ط) + ما - ۱ \text{ جب } (۲ن + ط) \} \frac{1}{ق}$$

جہاں ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے

اور موخر الذکر مقدار کی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت

$$\text{جم } \frac{۲ن + ط}{ق} + ما - ۱ \text{ جب } \frac{۲ن + ط}{ق}$$

اگر ہم ن کو سلسلہ وار ۱، ۲، ۳، ۴، ..... (ق - ۱) کے برابر فرض کریں تو مقادیر

$$\begin{aligned}
 & \text{جہ } \frac{ط}{ق} + ۱ - م \text{ جب } \frac{ط}{ق} \\
 & \text{جہ } \frac{ط + ۲۲}{ق} + ۱ - م \text{ جب } \frac{ط + ۲۲}{ق} \\
 & \text{جہ } \frac{ط + ۲۲}{ق} + ۱ - م \text{ جب } \frac{ط + ۲۲}{ق} \\
 & \text{جہ } \frac{ط + ۲۲}{ق} + ۱ - م \text{ جب } \frac{ط + ۲۲}{ق} \dots\dots (۱)
 \end{aligned}$$

میں سے ہر ایک، جملہ (جہ ط + ۱ - م جب ط) کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہوگی۔

یہ امر قابل غور ہے کہ بڑی سے بڑی قیمت جو ن کو دی جاسکتی ہے وہ (ق - ۱) ہے۔ کیونکہ اگر ن کو ق + ۱، ق + ۲، ..... کے برابر فرض کریں تو ان سے وہی نتائج حاصل ہونگے جو ن کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ..... وغیرہ کے مساوی فرض کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

نیز مقادیر (۱) میں سے کوئی دو مقادیر ایک دوسرے کے مساوی نہیں کیونکہ ان میں جھٹنے زاوے شامل ہیں ان میں سے کسی دو زاویوں کا فرق ہر حالت میں ۲۲ سے کم ہے اور ظاہر ہے کہ جب دو زاویوں کا فرق ۲۲ سے کم ہو تو یہ ناممکن ہے کہ ان کی جیوب بھی برابر ہوں۔

اور جیو ب الثام بھی۔

خلاصہ یہ ہے کہ جملہ

جم  $\frac{ن^۲ + ۲ط}{ق} + ۱ - ۱$  جب  $\frac{ن^۲ + ۲ط}{ق}$  میں ن کو  
علی التواتر ۱، ۲، ۳، ..... (ق - ۱) قیمتیں  
دینے سے ہم

(جم ط + ۱ - ۱ جب ط)  $\frac{۱}{ق}$

کی ق (اور صرف ق ہی) مختلف قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں  
۲۳ - اگر لا + خ کی شکل کی کوئی رقم دی ہو تو  
ہو تو ہم دفعہ ما قبل کی رو سے رقم مذکور کے کسی جذر  
کے واسطے شلثی جملے معلوم کر سکتے ہیں  
دفعہ ۲۰ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ لا + خ

= ص [جم (ن + ۲ ط) + ۱ - ۱ جب (ن + ۲ ط)]

جہاں ص =  $\sqrt{لا + ۲}$

اور ط ایک ایسا زاویہ ہے کہ جم ط =  $\frac{لا}{ص}$  اور جب ط =  $\frac{لا}{ص}$

۱ سئلے (لا + خ)  $\frac{۱}{ق}$

ص  $\frac{۱}{ق}$  [جم  $\frac{ن^۲ + ۲ط}{ق} + ۱ - ۱$  جب  $\frac{ن^۲ + ۲ط}{ق}$ ] ص  $\frac{۱}{ق}$

اس میں  $n$  کو علی التواتر ۱، ۲، ۳، ..... (ق-۱) قیمتیں دینے سے  
ق مطلوبہ جذر معلوم ہوتے ہیں۔

۲۵۔ مشتق (۱) (جم  $\frac{n}{12} + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}}$  جب  $\frac{n}{12}$ ) کی قیمتیں معلوم کر دو

$$\left( \text{جم } \frac{n}{12} + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[ \text{جم } \left( \frac{n}{12} + \frac{n^2}{12} \right) + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ جہاں } n \text{ کوئی صحیح عدد ہے۔}$$

$$= \left( \text{جم } \left( \frac{n}{12} + \frac{n^2}{12} \right) + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$n$  کو علی التواتر ۱، ۲، ۳، ..... قیمتیں دینے سے جوابات مطلوبہ کے  
لئے مندرجہ ذیل رقم حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{جم } \frac{n}{12} + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}}$$

$$\text{جم } \frac{n}{12} + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}}$$

$$\text{جم } \frac{n}{12} + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}}$$

$$\text{جم } \frac{n}{12} + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}}$$

یہ امر قابل غور ہے کہ  $n$  کو ۴ کے برابر لینے سے رقم مذکور کی  
کوئی نئی (پانچویں) قیمت حاصل نہیں ہوتی کیونکہ اس حالت میں ذیل  
کی رقم حاصل ہوگی۔

$$\text{جم } \left( \frac{n}{12} + \frac{n^2}{12} \right) + 1 - \sqrt{1 - \frac{n}{12}}$$



$$= \text{جم } \frac{n}{13} + \overline{1-12} \text{ جب } \frac{n}{13}$$

اور یہ رقم مندرجہ بالا چار رقوم میں سے پہلی رقم ہے۔ جسکو ہم معلوم کر چکے ہیں۔

اسی طرح  $n = 5$  اور  $n = 4$ ،  $n = 2$  سے ان چار رقوم میں سے بالترتیب دوسری تیسری اور چوتھی رقوم حاصل ہونگی۔

علیٰ ہذا القیاس

مشق ۲ - (۱) کی قیمتیں معلوم کرو۔

چونکہ جم  $n = 1$  اور جب  $n = 0$  اسلئے (۱) = (جم  $n + \overline{1-12}$  جب  $n$ )

$$= \left[ \text{جم } (n + n \cdot 2) + \overline{1-12} \text{ جب } (n + n \cdot 2) \right]$$

$$= \text{جم } \frac{n + n \cdot 2}{3} + \overline{1-12} \text{ جب } \frac{n + n \cdot 2}{3}$$

$n$  کو بالترتیب ۱، ۲ کے برابر لینے سے مطلوبہ قیمتیں حسب ذیل حاصل ہونگی۔

$$\text{جم } \frac{n}{3} + \overline{1-12} \text{ جب } \frac{n}{3} \text{ یعنی } \frac{1 + \overline{1-12}}{3}$$

$$\text{جم } n + \overline{1-12} \text{ جب } \frac{n}{3} \text{ یعنی } 1 - \overline{1-12}$$

$$\text{اور جم } \frac{n \cdot 5}{3} + \overline{1-12} \text{ جب } \frac{n \cdot 5}{3} \text{ یعنی } \frac{5 - \overline{1-12}}{3}$$

مشق ۳ - ذیل کی مساوات کو حل کرو۔

$$9 - 4 + 1 = 0$$

$$\text{مساوات مذکورہ} = (1 + \frac{1}{n}) (1 - \frac{1}{n}) =$$

پہلے جزو ضربی سے  $1 - \frac{1}{n} = \text{جم} (1 + \frac{1}{n}) + \text{جب} (1 + \frac{1}{n})$

$$\text{اسلئے لا} = \left[ \text{جم} (1 + \frac{1}{n}) + \text{جب} (1 + \frac{1}{n}) \right] \frac{1}{n}$$

$$\text{جم} = \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{2} + \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{2} \text{ جب}$$

ن کو حسب سابق ۱، ۲، ۳، ۴ قیمتیں دینے سے جوابات مطلوبہ حسب ذیل حاصل ہونگے۔

$$\text{جم} ۳۶ + \text{جب} ۳۶$$

$$\text{جم} ۱۰۸ + \text{جب} ۱۰۸$$

$$\text{جم} ۱۸۰ + \text{جب} ۱۸۰$$

$$\text{جم} ۲۵۲ + \text{جب} ۲۵۲$$

$$\text{جم} ۳۲۴ + \text{جب} ۳۲۴ \quad \text{اور}$$

دوسرے جزو ضربی سے  $1 - \frac{1}{n} = \text{جم} (1 + \frac{1}{n}) + \text{جب} (1 + \frac{1}{n})$

$$\text{لا} = \left[ \text{جم} (1 + \frac{1}{n}) + \text{جب} (1 + \frac{1}{n}) \right] \frac{1}{n}$$

$$\text{جم} = \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{2} + \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{2} \text{ جب}$$

اگر ن کو علی التواتر ۱، ۲، ۳ کے برابر فرض کیا جائے تو جوابات حسب ذیل حاصل ہونگے۔

$$۱ - \frac{1}{n} - ۱ - \frac{1}{n}$$

پس مساوات زیر بحث کی سب اصلیں معلوم ہونگیں

## مسئلہ ۳

ذیل کی رقوم کی سب قیمتیں معلوم کرو

- ۱ -  $\frac{1}{4}$
- ۲ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۳ -  $\frac{1}{4}(x)$
- ۴ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۵ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۶ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۷ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۸ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۹ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۱۰ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۱۱ -  $\frac{1}{4}(1-x)$
- ۱۲ -  $\frac{1}{4}(1-x)$

۱۳ - (جم  $\frac{11}{12}$  + خر جب  $\frac{11}{12}$ ) کو مختصر کرو اور جواب ایسی شکل میں حاصل کرو جس میں مثلثی جملات شامل نہ ہوں -

۱۴ - (جم  $\frac{11}{12}$  + خر جب  $\frac{11}{12}$ ) کی چار قیمتوں کا مسلسل حاصل ضرب معلوم کرو -

۱۵ - ثابت کرو کہ مساوات  $لا^۱ + لا^۱۱ = ۱ = ۰$  کی قیمتیں

$$\frac{1-x}{2} \left[ \text{جم } \frac{11}{12} + \text{خر جب } \frac{11}{12} \right] \text{ ہیں}$$

۱۶ - مساوات  $لا^۱ = ۱ = ۰$  کو حل کرو اور بتاؤ کہ اس کی کوئی اصل مساوات  $لا^۱ + لا^۱۱ + لا^۱۱ = ۰$  کو پورا کرتی ہے

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱۷ - لا + لا^۲ + لا^۳ + ۱ = ۰ \quad ۱۸ - لا + لا^۲ + لا^۳ + ۱ = ۰$$

۱۹۔ ثابت کرو کہ  $\sqrt{م(۱+ب\sqrt{خ})} + \sqrt{م(۱-ب\sqrt{خ})}$  کی ن حقیقی قیمتیں ہیں۔

اس سے  $\sqrt{م(۱+ب\sqrt{خ})} + \sqrt{م(۱-ب\sqrt{خ})}$  کی حقیقی قیمتیں معلوم کرو۔  
۲۰۔ ثابت کرو کہ ایک کے ن، ن دیں جذر ایک ہندی سلسلہ بناتے ہیں۔

۲۱۔ ایک کے سات ساتوں جذر معلوم کرو، اگر ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہو تو ثابت کرو کہ ان جذروں کی ن دین قوتوں کا مجموعہ سفر کے برابر ہوتا ہے۔ بشرطیکہ ن، کا ضعف نہ ہو۔  
لیکن اگر ن، کا ضعف ہو تو مجموعہ ۰ ہوگا۔

۲۲۔ ملٹف مقادیر کے لئے مسئلہ شتائی

یہ معلوم ہے کہ اگر ن اور مے حقیقی ہوں اور مے ایک سے کم ہو تو

$$(۱+مے) = ۱ + ن + مے \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱}$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲ \times ۱} + ..... (۱)$$

جب مے ایک ملٹف مقدار ہو (یعنی = لا + خ ما) ہو اور ن اور کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو معمولی ثبوت صادق آئے گا۔

اور مسئلہ (۱) اس صورت میں بھی درست رہیگا۔  
اگر مے ملتف ہو اور ن منفی ہو یا کسی کسر کے برابر  
ہو تو یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$+۱ ن مے + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} مے + ..... (۲)$$

(۱+ مے) ن کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہے بشرطیکہ  
مے کا مقیاس یعنی  $۱ + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲}$  ایک سے کم ہو۔  
اگر یہ مقیاس ایک کے برابر ہو تو یہ مسئلہ صرف  
ذیل کی صورتوں میں درست ہوگا۔

(۱) جب ن مثبت ہو اور

(۲) جب ن منفی کسر واجب ہو اور مے ۱ کے برابر نہ ہو

اس کا ثبوت قدرے مشکل ہے اور کتاب ہذا کی وسعت  
سے باہر ہے۔ اسلئے ہم محض نتیجہ کو درست فرض کر لیں گے۔  
طالب علم اگر چاہے تو اس مسئلہ کے متعلق مزید معلومات  
ہابسن کے علم مثلث دفعات ۲۱۱، ۲۱۲ سے یا کرشل کے  
الجبرا جلد دوم صفحہ ۲۶۲ سے حاصل کر سکتا ہے۔

# باب سوم

جب ن طہ اور جم ن طہ کی تفصیلات

جب طہ اور جم طہ کے سلسلے طہ کی قوتوں میں

۲۷- ڈی مائرے کے مسئلہ کی مدد سے جم ن طہ اور جب ن طہ کی تفصیلیں طہ کے مثلثی تفاعیل کی رقوم میں معلوم ہو سکتی ہیں۔

ہمیں معلوم ہے کہ (جم ن طہ + خر جب ن طہ)

= (جم طہ + خر جب طہ) ن

چونکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ اسلئے مسئلہ تنائی کی رو سے (جم طہ + خر جب طہ) ن کی تفصیل درست ہوگی۔

پس تفصیل کرنے سے

جم ن طہ + خر جب ن طہ = جم ن طہ + ن جم ن طہ - طہ خر جب طہ

+  $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$  جم ن طہ - طہ خر جب طہ

+  $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳!}$  جم ن طہ - طہ خر جب طہ + ....



تو سلسلہ ختم ہو جاتا ہے۔

۲۸۔ دفعہ ماقبل میں سلسلہ (۲) کو سلسلہ (۱) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{مس } n ط = \frac{\text{جب } n ط}{\text{جم } n ط}$$

$$n ط - n ط \text{ جب } ط = \frac{n (n-1) (n-2) \dots \text{جم } ط \text{ جب } ط + \dots}{3}$$

$$\text{جم } ط \frac{n (n-1) \dots \text{جم } ط \text{ جب } ط + \dots}{2} + \frac{n (n-1) (n-2) \dots \text{جم } ط \text{ جب } ط + \dots}{4}$$

اس مساوات کی بائیں جانب کے رکن کے شمار کنندہ اور نسب دونوں کو جم ط پر تقسیم کرنے سے

$$\text{مس } ط = \frac{n (n-1) (n-2) \dots \text{مس } ط + \dots}{3} + \frac{n (n-1) (n-2) \dots \text{مس } ط + \dots}{5}$$

$$1 \frac{n (n-1) \dots \text{مس } ط + \dots}{2} + \frac{n (n-1) (n-2) \dots \text{مس } ط + \dots}{4}$$

۲۹۔ جب ط اور جم ط کی قیمتیں استقراء حسابیہ کے طریقہ سے

بھی حاصل کی جاسکتی ہیں۔

اس طریقہ میں خیالی مقادیر کے استعمال کی ضرورت نہیں پڑتی۔

ثبوت کے لئے فرض کرو کہ سلسل (۱) اور (۲) ن کی کسی خاص قیمت کے واسطے درست ہیں۔



چونکہ  $\text{جم (ن+۱) ط} = \text{جم ن ط} + \text{جم ن ط جب ن ط جب ط}$   
 اسلئے  $\text{جم ن ط جب ط} - \text{جم ن ط جب ط کی قیمت سلسلہ (۱) کو}$   
 $\text{جم ط سے ضرب دیکر اور سلسلہ (۲) کو جب ط سے ضرب دیکر موخرالذکر}$   
 $\text{حاصل ضرب کو پہلے حاصل ضرب میں سے تفریق کرنے سے معلوم ہو سکتی ہے}$   
 $\text{اس حاصل تفریق کے لئے جو سلسلہ برآمد ہوتا ہے اس کی رقوم کو}$   
 $\text{کو ترتیب دینے سے معلوم ہو گا کہ سلسلہ محصلہ بعینہ وہی ہے جو}$   
 $\text{سلسلہ (۱) میں ن کی بجائے (ن+۱) لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔}$   
 $\text{جب (ن+۱) ط کے لئے بھی اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔}$   
 $\text{پس ثابت ہوا کہ اگر سلسلہ (۱) اور (۲) ن کی کسی ایک قیمت}$   
 $\text{کے لئے درست ہوں تو لازماً ن کی اس سے بالاتر قیمت کے لئے}$   
 $\text{بھی درست ہونگے۔}$

لیکن یہ تو ظاہر ہے کہ اگر  $\text{ن} = ۲$  یا  $۳$  تو یہ سلسلے درست ہوتے  
 ہیں، پس استقرا سے یہ سلسلے ن کی ہر قیمت کے لئے  
 درست ہونگے۔

۳۰۔ اگر غیر مساوی زوایا کی کسی تعداد کا مجموعہ دیا ہوا  
 ہو تو ڈی مائیرے کے مسئلہ سے انکے حاصل جمع کی جیب، یا جیب التمام  
 یا محاسن آن زوایا کے محاسن کی رقوم میں معلوم ہو سکتے  
 ہیں ہمیں معلوم ہے کہ

$\text{جم (عہ + بہ + جہ + ۰۰۰۰) خ جب (عہ + بہ + جہ + ۰۰۰۰)}$

$= (\text{جم عہ} + \text{خ جب عہ}) (\text{جم بہ} + \text{خ جب بہ}) (\text{جم جہ} + \text{خ جب جہ}) \dots (۱)$

اب جم عہ + خر جب عہ = جم عہ (۱ + خر مس عہ)

جم بہ + خر جب بہ = جم بہ (۱ + خر مس بہ)

.....

پس مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے

جم (عہ ۲ بہ + جمہ + ....) + خر جب (عہ + بہ + جمہ + ....)

= جم عہ جم بہ جم جمہ .... (۱ + خر مس عہ) (۱ + خر مس بہ)

(۱ + خر مس جمہ) .....

= جم عہ جم بہ جم جمہ .... [۱ + خر (مس عہ + مس بہ + مس جمہ + ...)]

+ خر (مس عہ مس بہ + مس بہ مس جمہ + ...)

+ خر (مس عہ مس بہ مس جمہ + ...)

+ ..... (۲)

دفعہ ۱۳۱ حصہ اول کا طریق کتابت استعمال کرنے سے یہ مساوات

ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے -

جم (عہ ۲ بہ + جمہ + ....) + خر جب (عہ + بہ + جمہ + ....)

= جم عہ جم بہ جم جمہ .... [۱ + خر ص - ص - ص + خر ص + ص - ص]

پس مساوات بالا میں خیالی حصوں کو باہم مساوی رکھتے ہوئے

جب (عہ + بہ + جمہ + ....)

= جم عہ جم بہ جم جمہ .... (ص - ص + ص - ص) (ص - ص) ... (۳)

اور حقیقی حصوں کو برابر کرنے سے جم (عہ + بہ + جمہ + ....)

= جم عہ جم بہ جم جمہ .... (۱ - ص + ص - ص + ص - ص) ... (۴)

لہذا عمل تقسیم سے

$$\frac{\text{ص} - \text{ص} + \text{ص} - \text{ص} \dots}{\text{ا} - \text{ص} + \text{ص} - \text{ص} \dots} = \text{مس} (\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \dots) \dots (۵)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) میں بائیں جانب کے رکنوں کی علامات متبادلاً مثبت اور منفی ہیں۔

رابط (۵) کو استقراساً حسابیہ سے دفعہ ۱۳۱ حصہ اول میں ثابت کیا جا چکا ہے۔

۳۱ - مشتق ثابت کرو کہ ذیل کی مساوات لا' جم ط + ب' جب ط + ۲ - لگ جم ط + ۲ ف ب جب ط + ج = ۰ ..... کی چار صلیں ہیں اور ط کی اُن قیمتوں کا مجموعہ جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، ۲ نیم قطری زادیوں کا کوئی جفت ضعف ہے۔

فرمن کرو کہ مس ط = ت

$$\frac{۲ \text{ مس ط}}{۱ + ۲ \text{ مس ط}} = \text{جب ط سے رد}$$

$$\frac{۱ - ۲ \text{ مس ط}}{۱ + ۲ \text{ مس ط}}$$

$$\text{ا سلسلے مساوات بالا} = \text{لا} \left( \frac{۱ - ت}{۱ + ت} \right) + \text{ب} \left( \frac{ت}{۱ + ت} \right)$$

$$+ ۲ \text{ لگ} \frac{۱ - ت}{۱ + ت} + ۲ \text{ ف ب} \frac{ت}{۱ + ت} + ج = ۰$$

یا بعد از اختصار ت' (۱ - لگ + ج) + ۲ ف ب ت + ت' (۲ ب - ۲ - لگ + ج)

$$۴ ن ب ت + ۲ ا + ۲ گ + ۱ ج + ..... = (۱)$$

اس مساوات کی سرکچا چار اصلیں ہیں۔

$$\text{نیز ص} = \text{اصلوں کا مجموعہ} = \frac{۴ ن ب}{۲ ا - ۲ گ + ۱ ج}$$

$$\text{ص} = \text{مجموعہ دو دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = \frac{۴ ن ب - ۲ ا + ۲ گ}{۲ ا - ۲ گ + ۱ ج}$$

$$\text{ص} = \text{مجموعہ تین تین اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = \frac{۴ ن ب}{۲ ا - ۲ گ + ۱ ج}$$

$$\text{ص} = \text{مجموعہ چار چار اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = \frac{۲ ا + ۲ گ + ۱ ج}{۲ ا - ۲ گ + ۱ ج}$$

چونکہ ص = ص اسلئے دفعہ ماقبل سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{مس} = \left( \frac{\text{ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط}}{۲} \right) = \frac{\text{ص} - \text{ص}}{۱ - \text{ص} + \text{ص}} = ۰ = \text{مس ن}$$

اور نسب نما، ۱ - ص + ص سفر نہیں ہوتا جب تک کہ ایک ب کے برابر نہ ہو۔

$$\text{اسلئے ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط} = ۲ \times \text{ن} = \text{نیم قطری}$$

یعنی ۲ نیم قطری زاویوں کا کوئی جفت صنف

[اس جو طالب علم ہندسہ تحلیل سے واقف ہے اُس سے مخفی نہیں کہ مشق ہذا

ذیل کے مسئلہ کا حل ہے۔ اگر ایک دائرہ اور ایک قطع ناقص ایک

دوسرے کو چار نقطہ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ان کے چار تقاطع

نقاط کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کا کوئی جفت

صنف ہوتا ہے]

## ۱۔ مثلہ ۴

ثابت کر دو کہ

- ۱۔ حجم ۴ ط = حجم ۲ ط - ۶ حجم ۲ ط جب ۲ ط + جب ۱ ط  
 ۲۔ جب ۶ ط = ۶ حجم ۵ ط جب ط - ۲۰ حجم ۳ ط جب ۲ ط + ۶ حجم ط جب ۵ ط  
 ۳۔ جب ۷ ط = ۷ حجم ۶ ط جب ط - ۳۵ حجم ۴ ط جب ۲ ط + ۲۱ حجم ۳ ط جب ۵ ط - جب ۱ ط  
 ۴۔ حجم ۹ ط = ۹ حجم ۸ ط - ۳۶ حجم ۳ ط جب ۲ ط + ۱۲۶ حجم ۲ ط جب ۵ ط - ۸۴ حجم ۱ ط جب ۱ ط  
 ۵۔ حجم ۸ ط = حجم ۷ ط - ۲۸ حجم ۶ ط جب ۲ ط + ۷۰ حجم ۴ ط جب ۲ ط - ۲۸ حجم ۲ ط جب ۱ ط + جب ۱ ط

مندرجہ ذیل کی قیمتیں مس ط کی رقوم میں لکھو

- ۶۔ مس ۵ ط - مس ۷ ط - مس ۸ ط - مس ۹ ط  
 ۹۔ ثابت کر دو کہ حجم ۱۱ ط اور جب ۱۱ ط کی تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب  
 - ۱۱ حجم ط جب ۱ ط اور - جب ۱ ط ہیں -  
 ۱۰۔ ثابت کر دو کہ جب ۸ ط اور جب ۹ ط کی تفصیلوں میں آخری رقوم  
 بالترتیب - ۸ حجم ط جب ۱ ط اور جب ۱ ط ہیں -  
 ۱۱۔ اگر ن کوئی طاق عدد ہو تو ثابت کر دو کہ جب ن ط اور حجم ن ط کی  
 تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب  
 (۱-) $\frac{1-n}{2}$  جب ن ط اور ن (۱-) $\frac{1-n}{2}$  حجم ط جب ن-۱ ط ہونگی -

- ۱۲۔ اگر ن کوئی حقت عدد ہو تو ثابت کر دو کہ جب ن ط اور حجم ن ط کی

تفصیلات میں آخری رقوم بالترتیب

ن (۱-)  $\frac{ن}{۲}$  جم طہ جب ن-۱ طہ اور (۱-)  $\frac{ن}{۲}$  جب ن طہ ہونگی۔

۱۳۔ اگر مساوات لا<sup>۱</sup> + ف لا<sup>۱</sup> + ق لا + ف = ۰ کی اصلیں عہ، ب اور ج ہوں تو ثابت کرو کہ سوائے ایک خاص صورت کے  
مست<sup>۱</sup> ع + مست<sup>۱</sup> ب + مست<sup>۱</sup> ج = ن ۲ نیم قطری۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

جب ۳ طہ = ۸ جب طہ + ب جم طہ + ج

کی ۴ اصلیں ہیں اور طہ کی اُن چھ قیمتوں کا مجموعہ جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں ۲۱ تق کے کسی طاق صنف کے برابر ہے۔  
۱۵۔ ثابت کرو کہ مساوات

۱۸ قط طہ - ب ک قم طہ = ۱۸ - ب ۲

کی چار اصلیں ہیں اور طہ کی جو چار قیمتیں اس مساوات کو پورا کرتی ہیں اُنکا حاصل جمع ۲۱ تق کے کسی طاق صنف کے برابر ہے۔  
۱۶۔ اگر طہ کی وہ تین قیمتیں جو مساوات

مس ۲ طہ = ۱۸ مس (طہ + عہ)

کو پورا کریں طہ، طہ، طہ ہوں اور ان میں سے کسی دو کا فرق ۲ کا کوئی صنف نہ ہو تو ثابت کرو کہ

ط + ط + ط + عہ، ۲ کا کوئی صنف ہے۔

کسی زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی تفصیلیں زاویہ  
مذکور کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں

$$\begin{aligned} ۳۲- \text{بجوب دفعہ } ۲ \text{ جم } ۱ \text{ طہ} = \text{جم } ۲ \text{ طہ} - \frac{ن(۱-ن)}{۲} \text{ جم } ۲ \text{ طہ جب } ۲ \text{ طہ} \\ + \frac{ن(۱-ن)(۲-ن)}{۲} \text{ جم } ۳ \text{ طہ جب } ۲ \text{ طہ} - \dots \\ \text{اگر } ۱ \text{ طہ کو } ۲ \text{ طہ کے برابر فرض کیا جائے تو} \\ \text{جم } ۲ \text{ طہ} = \text{جم } ۲ \text{ طہ} - \frac{ن(۱-ن)}{۲} \text{ جم } ۲ \text{ طہ جب } ۲ \text{ طہ} \\ + \frac{ن(۱-ن)(۲-ن)}{۲} \text{ جم } ۳ \text{ طہ جب } ۲ \text{ طہ} - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \text{جم } ۱ \text{ طہ} - \frac{ن(۱-ن)}{۲} \text{ جم } ۲ \text{ طہ} + \frac{ن(۱-ن)(۲-ن)}{۲} \text{ جم } ۳ \text{ طہ} - \dots \\ (۱) \dots \end{aligned}$$

اس مساوات میں طہ کو لا انتہا چھوٹا بنا دو اور عہ کو مستقل رکھو جس سے ن  
لا انتہا بڑا بن جائے گا۔

تب جب طہ کی انتہا ایک ہوگی اور نیز (جب طہ) کی سب قوتوں کی  
انتہا بھی ایک ہوگی۔ (دفعہ ۱۵)

نیز جم طہ کی انتہا بھی ایک ہوگی اور جم طہ کی دیگر قوتوں کی انتہا  
بھی ایک ہوگی۔ (دفعہ ۱۴)

اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\text{جم عہ} = ۱ - \frac{\text{عہ}^۲}{۲!} + \frac{\text{عہ}^۴}{۴!} - \frac{\text{عہ}^۶}{۶!} + \dots \dots \dots \text{تا لانتا ہی}$$

(سلسلہ ہذا کا مقابلہ دفعہ ۱۶ کے سلسلہ سے کرو)

۳۳۔ جب عہ کی تفصیل عہ کی رقوم میں  
بموجب دفعہ ۲۷

$$\text{جب ن ط} = \text{ن جم}^۳ \text{ ط جب ط}$$

$$- \frac{\text{ن} (۱ - \text{ن}) (۲ - \text{ن})}{۳!} \text{جم}^۳ \text{ ط جب ط} + \dots \dots \dots$$

حسب سابق ن ط کو عہ کے برابر فرض کرنے سے

$$\text{جب عہ} = \frac{\text{عہ}}{\text{ط}} \text{جم}^۳ \text{ ط جب ط} - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}} (۱ - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}}) (۲ - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}}) \text{جم}^۳ \text{ ط جب ط}$$

$$+ \frac{\text{عہ}}{\text{ط}} (۱ - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}}) (۲ - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}}) (۳ - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}}) \text{جم}^۵ \text{ ط جب ط} + \dots \dots \dots$$

$$= \text{عہ جم}^۳ \text{ ط} (1 - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}}) - \frac{\text{عہ} (۱ - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}}) (۲ - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}})}{\text{ط}} \text{جم}^۳ \text{ ط} (1 - \frac{\text{عہ}}{\text{ط}}) + \dots \dots \dots$$

حسب دفعہ ما قبل ط کو لانتا چھوٹا بنانے اور عہ کو مستقل رکھنے سے

$$\text{جب عہ} = \text{عہ} - \frac{\text{عہ}^۳}{۳!} + \frac{\text{عہ}^۵}{۵!} - \frac{\text{عہ}^۷}{۷!} + \dots \dots \dots \text{تا لانتا ہی}$$

[دفعہ ۱۶ سے مقابلہ کرو]

۳۴۔ دفعات ۳۲ اور ۳۳ کے سلسلوں کی ماترہ مس ط کے لئے



کوئی ایسا سلسلہ نہیں ہے جسکی رقوم کا تسلسل کسی آسان قانون پر مبنی ہو۔  
بہر حال ہم مس ط کے لئے ایک سلسلہ ط کی پانچویں قوت تک  
معلوم کرینگے۔

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{3} + \frac{\text{ط}^3}{5} - \dots}{1 - \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^4}{24} - \dots}$$

$$= (\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{3} + \frac{\text{ط}^3}{5} - \dots) \left[ 1 - \left( \frac{\text{ط}^2}{2} - \frac{\text{ط}^4}{24} + \dots \right) \right]$$

$$= (\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{3} + \frac{\text{ط}^3}{5} - \dots) \left[ 1 - \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^4}{24} - \dots \right]$$

مسئلہ ثنائی سے

$$= (\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{3} + \frac{\text{ط}^3}{5} - \dots) \left[ 1 - \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^4}{24} - \dots \right]$$

ط اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنے سے

$$= (\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{3} + \frac{\text{ط}^3}{5} - \dots) \left( 1 - \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^4}{24} + \dots \right)$$

جو اختصار کرنے اور ط سے اوپر کی رقوم چھوڑ دینے سے

$$= \text{ط} + \frac{\text{ط}^3}{3} - \frac{\text{ط}^5}{15} + \dots$$

اگرچہ ہم اس قاعدہ سے مس ط سے لئے سلسلہ بالا کی جتنی رقوم چاہیں  
معلوم کر سکتے ہیں تاہم یہ سلسلہ بہت جلد دشوار اور تکلیف دہ ہو جاتا ہے۔  
۳۵ - دفعات ۳۲ اور ۳۳ میں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ زاویہ  
زیر بحث میں عنیم قطریوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر ایسا  
نہ ہو تو ط کو لا انتہا چھوٹا فرض کرنے سے جب ط کی انتہائی قیمت

ایک نہیں ہو سکتی۔

اگر زاویہ کی مقدار درجوں میں دی ہوئی ہو تو ذیل کا عمل اختیار کیا جائے گا۔

$$\text{فرض کرو کہ } \theta = \text{لا نیم قطری یعنی}$$

$$\frac{\theta}{180} = \frac{\pi}{180} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\pi}{180} = \frac{\theta}{180}$$

$$\text{تب} \quad \text{جیب } \theta = \text{جیب } \frac{\pi}{180}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{2 \times 180^2} + \frac{\pi^4}{24 \times 180^4} - \frac{\pi^6}{720 \times 180^6} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{2 \times (180)^2} + \frac{\pi^4}{24 \times (180)^4} - \frac{\pi^6}{720 \times (180)^6} + \dots \quad \text{لاتناہی تک}$$

اسی طرح سے

$$\text{جب } \theta = \text{جب } \frac{\pi}{3}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^4}{24 \times 3^4} - \frac{\pi^6}{720 \times 3^6} + \dots$$

$$= \frac{\pi^2}{180^2} - \frac{\pi^4}{24 \times (180)^4} + \frac{\pi^6}{720 \times (180)^6} - \dots \quad \text{لاتناہی}$$

۳۶۔ چھوٹے زاویوں کی جیب اور جیب التمام  
دفعات ۳۲ اور ۳۳ کے سلسلوں کی مدد سے چھوٹے زاویوں کی جیب  
اور جیب التمام باسانی معلوم ہو سکتی ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ جب ۱۰" اور جیب ۱۰" کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہو

$$\text{چونکہ } ۱۰" = \left( \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{4 \times 4} \right) \text{ نیم قطری} = \left( \frac{\pi}{4 \times 180} \right) \text{ نیم قطری}$$

$$\text{ہذا جب } ۱۰" = \frac{\pi}{4 \times 180} - \frac{\pi^3}{24 \times (4 \times 180)^3} + \frac{\pi^5}{24 \times (4 \times 180)^5} - \dots$$

$$\text{اور حجم } 10 = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{11}{43800} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{11}{43800} \right)^2 - \frac{1}{96} \left( \frac{11}{43800} \right)^3 + \dots$$

$$\text{اب } \frac{11}{43800} = 5 \dots 28281348 \dots$$

$$\text{اور } \left( \frac{11}{43800} \right)^2 = 5 \dots 23504 \dots$$

$$\text{اور } \left( \frac{11}{43800} \right)^3 = 5 \dots 113928 \dots$$

پس اعشاریہ کے بارہویں مقام تک

$$\text{جب } 10 = 5 \dots 28281348 \dots$$

$$\text{اور حجم } 10 = 1 - \frac{5 \dots 23504}{2} =$$

$$5 \dots 1165 = 1 -$$

$$5999999998825 =$$

۳۷۔ کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت

دفعہ ۳۳ کا سلسلہ کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرنے میں بھی بہت کارآمد ہوتا ہے، اس قاعدہ کی بہترین تشریح چند مثالوں سے ہو سکتی ہے۔

$$\text{مشق ۱۔ اگر } \frac{1329}{1350} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \text{ تو ثابت کرو کہ زاویہ ط قریباً } \frac{1}{5} \text{ نق کے مساوی ہوگا۔}$$

ہم جانتے ہیں کہ زاویہ ط جتنا چھوٹا ہوگا جب ط کی قیمت اتنی ہی ایک کے زیادہ قریب ہوگی۔ اور چونکہ اس مشق میں  $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$  کی قیمت تقریباً ۱ کے مساوی ہے اسلئے ظاہر ہے کہ ط بہت چھوٹا ہے۔

اگر جب ط کے سلسلہ (دفعہ ۳۳) میں ط کی تیسری قوت سے بڑی قوتیں



ہے اس لئے لازماً طہ کی قیمت بہت چھوٹی ہوگی۔  
مساوات مذکورہ اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{1}{p} - \text{جم طہ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{جب طہ} = 5.29 = \frac{1}{p} - \frac{1}{100} \dots\dots\dots (1)$$

پہلی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے لئے طہ کا مربع اور مربع سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنا کافی ہوگا۔

تب دفعہ ۳۳ کی رو سے یہ مساوات

$$\frac{1}{p} - 1 \times \frac{1}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{طہ} = \frac{1}{p} - \frac{1}{100}$$

$$\text{جس سے طہ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{100} = \frac{\sqrt{3}}{300} = \frac{1.732}{300} = 0.00577 \dots\dots$$

$$= 0.00577 \dots\dots \text{نیم قطری}$$

اس سے زیادہ صحیح تقریبی قیمت معلوم کرنے کے واسطے طہ کی تیسری قوت اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنا چاہیے۔

اس صورت میں مساوات (۱) ہو جائے گی:

$$\frac{1}{p} - \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{طہ} = \frac{1}{p} - \frac{1}{100}$$

یعنی  $\text{طہ} + \frac{1}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{طہ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{p}$

$$\therefore \text{طہ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{p} = \frac{1.732}{2} - \frac{1}{100} = 0.866 - 0.01 = 0.856 \dots\dots \text{نیم قطری}$$

اس سے ظاہر ہے کہ پہلی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چوتھے مقام تک درست ہے۔  
لہذا زاویہ طہ تقریباً ۵۰.۱۱۵ نیم قطری یعنی ۴۰ کے مساوی ہے۔

جدولوں کی رو سے درست جواب ۵۰.۱۱۵ نیم قطری ہے۔

## ۳۸۔ بظاہر غیر متعین مقادیر کی قیمت معلوم کرنا

اکثر اوقات ہمیں ایسی مقادیر کی قیمت معلوم کرنی پڑتی ہے جو بظاہر غیر متعین ہوتی ہیں۔  
فرض کرو کہ

$$\frac{۳ \text{ جب } ط - \text{ جب } ۳ ط}{ط (جم ط - جم ۳ ط)}$$

کی قیمت معلوم کرنا مطلوب ہے جہاں ط صفر ہے۔  
اگر ہم جگہ بجا میں ط کی جگہ صفر رکھیں تو یہ

$$\frac{۰}{۰} =$$

جو بظاہر غیر متعین ہے۔

تاہم ط کی تمام قیمتوں کے لئے مذکورہ بالا جملہ

$$\frac{۳ \text{ جب } ط - (۳ \text{ جب } ط - ۳ \text{ جب } ط)}{ط (جم ط - جم ۳ ط)} = \frac{۳ \text{ جب } ط - ۳ \text{ جب } ط}{ط (جم ط - جم ۳ ط)} = \frac{۳ \text{ جب } ط}{ط (جم ط - جم ۳ ط)} = \frac{۳ \text{ جب } ط}{ط} \times \frac{۱}{جم ط - جم ۳ ط} = \frac{۳ \text{ جب } ط}{ط} \times \frac{۱}{جم ط}$$

اب ط جتنا چھوٹا ہوگا اتنا ہی  $\frac{۱}{جم ط}$  اور  $\frac{۳ \text{ جب } ط}{ط}$  دونوں کی قیمتیں ایک کے قریب ہوں گی۔

اس لئے جس وقت ط کی انتہائی قیمت صفر ہو جاتی ہے اس وقت  
مذکورہ بالا جملہ کی انتہائی قیمت ۱×۱ یعنی ۱ ہو جاتی ہے۔

اس قسم کی رقم کو حکام نے ابھی اوپر ذکر کیا ہے غیر متعین رقم کہتے ہیں یہ کہنا شاید

زیادہ درست ہوگا کہ مذکورہ بالا جملہ صرف بادی النظر میں غیر متعین ہے۔  
 ۳۹۔ جب ط اور جم ط کے سلسلوں کو استعمال کرنے سے اس قسم کے  
 بہت سے جملوں کی اصلی قیمت نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے۔  
 اس قاعدہ کی توضیح کے لئے چند مشقیں ذیل میں درج کی جاتی ہیں۔  
 دفعہ ما قبل کی مثال ذیل کی پہلی مشق کی ایک خاص صورت ہے۔  
 مشق ۱۔ اگر ط صفر ہو تو ذیل کے جملہ کی قیمت معلوم کرو

$$\frac{n \text{ جب ط } - \text{ جب } n \text{ ط}}{\text{ط (جم ط - جم } n \text{ ط)}}$$

$$\text{جملہ مذکور} = \frac{n \text{ (ط - } \frac{3}{2} \text{ ط} + \frac{5}{2} \text{ ط} - \dots) - (n \text{ ط - } \frac{3}{2} \text{ ط} + \frac{5}{2} \text{ ط} - \dots)}{}$$

$$\frac{\text{ط} \left[ (1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \dots) - (1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \dots) \right]}{}$$

$$= \frac{\text{ط} \left[ \frac{1-3}{2} - \frac{1-3}{2} + \frac{5-3}{2} - \dots \right]}{}$$

$$= \frac{\text{ط} \left[ \frac{1-3}{2} - \frac{1-3}{2} + \frac{5-3}{2} - \dots \right]}{}$$

$$\frac{\text{ط} \left[ \frac{1-3}{2} - \frac{1-3}{2} + \frac{5-3}{2} - \dots \right]}{}$$

اگر ط صفر ہو جائے تو یہ رقم

$$\frac{n}{3} = \frac{1-3}{2} + \frac{n-3}{2} =$$

مشق ۲۔ اگر لا صفر ہو جائے تو جملہ

$$\frac{\text{جملہ لا - لوک و (۱+لا) + جب لا-۱}}{(لا+۱)}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\text{اور فو } 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\dots\dots \text{ (دفعات ۵ اور ۸)}$$

$$\text{اسلئے یہ جملہ} = \frac{1 - \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 \right) + \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{16} \right) - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{16} \right) + \dots\dots\dots}{(1 + 1) - \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right)}$$

$$\frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1} = 0$$

اگر لا صفر ہو تو یہ = + = 0

مشق ۳۔ اگر لا صفر ہو جائے تو

(مس لا) کی قیمت معلوم کرو

اگر لا صفر ہو جائے تو یہ رقم (صفر) کی شکل اختیار کر لیتی ہے

$$\text{نیز یہ رقم} = \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) \text{ (دفعہ ۳۲)}$$

اب بوجہ نتیجہ صریح دفعہ ۲ (۱ + \frac{1}{16}) کی قیمت ہو جاتی ہے جب لا صفر ہو

$$\text{لہذا رقم مذکور} = \frac{1}{16} = \frac{1}{16} = 1$$

جملہ زیر بحث کی قیمت اس کا کو کارتم معلوم کرنے سے بھی حاصل کیجا سکتی ہے۔

## امثلہ ۵

$$1 - \text{اگر جب ط} = \frac{1.13}{1.13} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$



ط تقریباً نیم قطر یوں کی اس تعداد کو تعبیر کرتا ہے جو ۴۰ ۴۲ میں ہیں۔

۲ - اگر  $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۸۶۳}{۸۶۴}$  تو ثابت کرو کہ

ط تقریباً ۴۰ ۴۷ کے برابر ہے۔

۳ - اگر  $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۵۰۴۵}{۵۰۴۶}$  تو ثابت کرو کہ

زاویہ ط تقریباً ۵۸ ۱ کے برابر ہے۔

۴ - اگر  $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۲۱۶۵}{۲۱۶۶}$  تو ثابت کرو کہ

زاویہ ط تقریباً ۱ ۳ کے برابر ہے۔

۵ - اگر  $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۱۹۲۹۳}{۱۹۲۹۴}$  تو ثابت کرو کہ

ط کی تقریبی قیمت ۱ ہے۔

۶ - اگر  $\frac{۱}{۱۵} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$  تو ط کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

اگر لاصفر ہو جائے تو ذیل کے جلوں کی قیمتیں معلوم کرو۔

۷ -  $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$

۸ -  $\frac{\text{لا}}{\text{جم م لا}}$

۹ -  $\frac{\text{جب لا}}{\text{جب ب لا}}$

۱۰ -  $\frac{\text{س لا - جب لا}}{\text{جب لا}}$

۱۱ -  $\frac{\text{س لا - ۲ جب لا}}{\text{لا}}$

۱۲ -  $\frac{\text{س لا}}{\text{س ب لا}}$  (نوٹ) س سے مراد سہم الجیب یعنی جب معکوس ہے)

۱۳ -  $\frac{\text{م جب لا - جب م لا}}{\text{م (جم لا - جم م لا)}}$

- ۱۴-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۱۵-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۱۶-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۱۷-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۱۸-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۱۹-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۲۰-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۲۱-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۲۲-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۲۳-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۲۴-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۲۵-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$
- ۲۶-  $\frac{1^2 \text{ جب } 1 \text{ لا} - 2^2 \text{ جب } 2 \text{ لا}}{3^2 \text{ جب } 3 \text{ لا}}$

$$۲۷ - \left( \text{جم } \frac{۱}{۲} + \text{جب } \frac{۳}{۲} \right) \frac{۱}{۲}$$

اگر لایہ کے مساوی ہو تو ذیل کے جلوں کی قیمتیں معلوم کرو:-

$$۲۸ - \frac{(\text{جم } ۱ + \text{جب } ۲ + \text{جم } ۳)}{(\text{جب } ۲ + \text{جم } ۲ - \text{جب } ۳)}$$

$$۲۹ - (\text{جب } ۱) \text{ مس } ۱$$

$$۳۰ - \text{قط } ۱ - \text{مس } ۱$$

اگر ن لا انتہا بڑا ہو تو ذیل کے جلوں کی قیمتیں معلوم کرو:-

$$۳۱ - (\text{جم } \frac{۱}{۲}) \quad ۳۲ - (\text{جم } \frac{۱}{۲}) \quad ۳۳ - (\text{جم } \frac{۱}{۲})$$

$$۳۴ - \text{اگر } \angle < ۱ \text{ اور } \frac{۳}{۲} \text{ تقریباً تو ثابت کرو کہ (جب طہ) خلی تقریبی قیمت}$$

$$\text{ہوگی} \frac{(۱-ن) + (۱+ن) \text{ جب طہ}}{(۱+ن) + (۱-ن) \text{ جب طہ}}$$

$$۳۵ - \text{اگر بہ کی قیمت انتہائی صورت میں عہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{عہ جب بہ} - \text{بہ جب عہ} = \text{مس (عہ - مس ۱ عہ)}$$

$$۳۶ - \text{ثابت کرو کہ مس ۱} - \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۲} = \text{مس ۱} - \frac{۱}{۳۹}$$

اور اس سے حاصل کرو کہ اگر ایک قائم الزاویہ مثلث ۱ ب ج کا زاویہ

ج قائم ہو اور ج ۱ ب کا پانچ گنا ہو تو زاویہ ۱ زاویہ قائمہ کے  $\frac{۱}{۸}$

سے بقدر ۳۶ کے بڑا ہو گا جب موخر الذکر اعداد کی صحت کو قریب ترین

ثانیہ تک ملحوظ رکھا جائے۔

۳۷۔ ر اور ب کی ایسی قیمتیں معلوم کرو کہ جملہ ر جب لا + ب جب ۲ لا کی قیمت ایک چھوٹے زاویہ لا کے نیمقطریوں کی تعداد کے اتنی قریب ہو جتنی کہ ممکن ہے۔

۳۸۔ اگر ما = لا۔ ر جب لا جہاں ر ایک نہایت چھوٹی مقدار ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } \frac{ب}{۲} = \text{مس } \frac{لا}{۲} (۱ - ر + ر جب \frac{لا}{۲})$$

اور  $\text{مس } \frac{لا}{۲} = \text{مس } \frac{ب}{۲} (۱ + ر + ر جب \frac{ب}{۲})$   
جہاں ر کی دو سے بڑی قوتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

۳۹۔ اگر مساوات جب (سہ - طہ) = جب سہ جم عہ میں طہ بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ اس کی تقریبی قیمت  
۲ مس سہ جب عہ (مس سہ جب عہ)  
ہوگی۔

۴۰۔ اگر جب فہ کی قیمت سے یہ معلوم ہو کہ زاویہ فہ ۱۵ سے بڑا نہیں ہے تو ثابت کرو کہ اس کی قیمت اور کسر

$$۲۸ \text{ جب } ۲ \text{ فہ} + \text{جب } ۴ \text{ فہ}$$

$$۱۲ (۳ + ۲ جم ۲ فہ)$$

کی قیمت میں تفاوت ا کے نیمقطریوں کی تعداد سے کم ہے۔

۴۱۔ مشق۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۸ لا - ۴ لا - ۴ لا + ۱ = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

کی اصلیں جم  $\frac{۱۱}{۲}$ ، جم  $\frac{۱۱۳}{۲}$ ، جم  $\frac{۱۱۵}{۲}$  ہیں۔



مساوات (۵) کو ۳ پر تقسیم کرنے سے

$$0 = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{64} + \frac{1}{64}$$

یعنی ۸ لا۳ - ۴ لا۲ - ۴ لا۱ + ۱ = ۰ ..... (۶)

اس مساوات کی اصلیں

$$\text{جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}$$

ہیں اور چونکہ

$$\text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2}$$

اس لئے مساوات (۶) کی اصلیں

$$\text{جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ اور جم } \frac{\pi}{2} \text{ ہیں۔}$$

تب صریحاً

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2}$$

اور جم  $\frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8}$

دوسرا طریقہ

مساوات (جم طہ + خر جب طہ) = ۱ ..... (۷)

یعنی جم طہ + خر جب طہ = ۱

طہ کی مندرجہ ذیل قیمتوں میں سے ہر ایک سے پوری ہوتی ہے

$$\text{جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}$$

(۸) .....

اگر ہم جب طہ کی بجائے ج اور جم طہ کی بجائے م لکھیں اور مساوات (۷) کو

مسئلہ شنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو

$$م + ۷م ج - ۲۱م ج - ۲۵م ج + ۳۵م ج + ۲۱م ج - ۷م ج - ۷م ج = ۱$$

اس مساوات کی دونو جانبوں کے حقیقی حصوں کو برابر کرنے سے

$$م - ۲۱م ج + ۳۵م ج - ۷م ج = ۱$$

چونکہ ج = ۱ - م، اس لئے ظاہر ہے کہ زویا (۸) میں سے ہر ایک کی جیب التمام ذیل کی مساوات کو پورا کرتی ہے۔

$$۶۴م - ۱۱۲م + ۵۶م - ۷م + ۱ = ۰ \dots \dots \dots (۹)$$

$$(۱ + م) (۸م - ۲م - ۲م + ۱) = ۰ \dots \dots \dots (۱۰)$$

لیکن

$$ج = ۱ - م، ۱ - م = ۱۳م - ۱۱م، ۱ - م = ۱۱م - ۳م$$

$$اور ج = ۵م - ۳م$$

اس لئے مساوات (۱۰) کی اصلیں

$$۱ - م = ۱۳م - ۱۱م، ۱ - م = ۱۱م - ۳م، ۵م - ۳م = ۱$$

ہیں جہاں آخر کی تین اصلیں دو دو دفعہ آتی ہیں۔

$$اس لئے ج = ۱۱م - ۳م، ۵م - ۳م، ۵م - ۳م$$

$$مساوات ۸م - ۲م - ۲م + ۱ = ۰$$

کی اصلیں ہیں اور یہ مساوات وہی ہے جو مساوات (۶) ہے۔

باب مابعد میں دفعہ ۹م کی مساوات (۲) میں ن کی بجائے ۷ لکھنے

سے بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

تیسرا طریقہ۔

اگر زادیوں کی کم تعداد کو شریک کیا جائے تو مساوات (۶) خیالی مقادیر کے

استعمال کے بغیر بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے۔  
فرض کرو کہ طہ زویا ۱۷ (۸) میں سے کسی زاویہ کو تعبیر کرتا ہے  
یعنی ۷ طہ، ۲۲ کا کوئی طاق ضعف ہے۔

$$\begin{aligned} & \therefore \text{جم } ۲ طہ = \text{جم } ۳ طہ \\ & \text{پس اگر جم طہ کی بجائے م لکھیں تو} \\ & \{ ۱ - ۲۲ - ۱ \} = ۱ - \{ ۲ - ۳ - ۳ \} \\ & \text{یعنی } ۸ - ۲۲ - ۱ = ۱ + ۲ - ۳ - ۳ \\ & ۸ - ۲۲ + ۲ - ۳ - ۳ = ۱ + ۱ = ۰ \\ & ۸ - (۱ + ۲ - ۲ - ۳) = ۰ \\ & \text{لہذا طریقہ دوم کے عمل کے بموجب} \\ & \text{مساوات } ۸ - ۲۲ - ۲ - ۳ = ۱ + ۱ = ۰ \end{aligned}$$

کی اصلیں جم  $\frac{۲۲}{۲}$ ، جم  $\frac{۲۲}{۲}$  اور جم  $\frac{۲۲}{۲}$  ہیں۔  
۴۱۔ دفعہ ماقبل کی مدد سے ہم ایک ایسی مساوات حاصل کر سکتے ہیں  
جس کی اصلیں

$$\text{قطر } \frac{۲۲}{۲}، \text{قطر } \frac{۲۲}{۲}، \text{قطر } \frac{۲۲}{۲}$$

ہوں۔

گذشتہ دفعہ کی مساوات (۶) میں  $\frac{۱}{۲}$  کو ماکے اور  
بنابریں لا کو  $\frac{۱}{۲}$  کے برابر فرض کرو تب فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے  
کہ

$$\text{قطر } \frac{۲۲}{۲}، \text{قطر } \frac{۲۲}{۲}، \text{قطر } \frac{۲۲}{۲}$$



مساوات  $\frac{9}{16} - \frac{2}{4} - \frac{2}{16} + 1 = 0$  کی اصلیں ہیں یا مساوات کو  
ناطق بنانے سے  $3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 80 = 64 \dots\dots\dots (1)$   
کی اصلیں ہیں۔

اب  $1 + \sqrt{2}$  کے برابر فرض کر دو تب چونکہ  $\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$  طہ  
اسلئے

$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$   
مساوات  $(1 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 80 = 64 \dots\dots\dots (2)$   
یعنی  $1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 = 0$   
کی اصلیں ہیں۔

مساوات (۲) براہ راست بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے۔  
کیونکہ اگر طہ ذیل کے زاویوں

$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$   
میں سے کسی ایک کو تغیر کرے تو  $\sqrt{2} = 0$ ۔  
یعنی (اگر  $\sqrt{2}$  طہ کو  $\sqrt{2}$  سے تغیر کیا جائے تو دفعہ ۳۰ کی رو سے  
 $1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 = 0$   
یا  $1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 = 0$ ۔

یا  $1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 = 0 \dots\dots\dots (3)$   
لیکن چونکہ  $\sqrt{2} = 0$ ،  $\sqrt{2} = 0$ ،  $\sqrt{2} = 0$ ،  $\sqrt{2} = 0$ ،  $\sqrt{2} = 0$   
اور  $\sqrt{2} = 0$ ،  $\sqrt{2} = 0$ ۔  
اسلئے مساوات (۳) کی اصلیں

$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$ ۔

ہیں۔

پس ت کوئی کے مساوی رکھنے سے  
 $\frac{\pi}{2}$ ،  $\frac{\pi}{4}$ ،  $\frac{\pi}{3}$ ،  $\frac{\pi}{6}$  مساوات (۲) کی اصلیں ہیں۔

### امثلہ ۶

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\pi}{6} - 2\text{جم}\right)\left(\frac{\pi}{4} - 2\text{جم}\right)\left(\frac{\pi}{3} - 2\text{جم}\right)\left(\frac{\pi}{2} - 2\text{جم}\right) = 1 + 2\text{لا} - 2\text{لا}^2 - 2\text{لا}^3 + 1$$

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$1 + 2\text{لا} - 2\text{لا}^2 - 2\text{لا}^3 + 1 = 0$$

کی اصلیں جم  $\frac{\pi}{2}$ ، جم  $\frac{\pi}{4}$ ، جم  $\frac{\pi}{3}$ ، جم  $\frac{\pi}{6}$  ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ

جب  $\frac{\pi}{2}$ ، جب  $\frac{\pi}{4}$ ، جب  $\frac{\pi}{3}$ ، جب  $\frac{\pi}{6}$  مساوات  $1 + 2\text{لا} - 2\text{لا}^2 - 2\text{لا}^3 + 1 = 0$  کی اصلیں ہیں۔

ثابت کرو کہ

$$1 = \frac{1}{\frac{\pi}{6} - 2\text{قط}} + \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 2\text{قط}} + \frac{1}{\frac{\pi}{3} - 2\text{قط}} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2\text{قط}}$$

$$5 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9}$$

$$6 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9}$$

$$6 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{11} + \frac{\pi}{11} + \frac{\pi}{11} + \frac{\pi}{11}$$

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{\pi}{11}, \frac{\pi^2}{11}, \frac{\pi^3}{11}, \frac{\pi^4}{11}, \frac{\pi^5}{11}, \frac{\pi^6}{11}, \frac{\pi^7}{11}, \frac{\pi^8}{11}, \frac{\pi^9}{11}, \frac{\pi^{10}}{11}$$

ہیں۔ [نوٹ۔ دفعہ ۳۰ کی مساوات (۳) سے شروع کرو]

ثابت کرو کہ

$$9 - \frac{\pi}{11} - \frac{\pi^2}{11} - \frac{\pi^3}{11} - \frac{\pi^4}{11} - \frac{\pi^5}{11} - \frac{\pi^6}{11} - \frac{\pi^7}{11} - \frac{\pi^8}{11} - \frac{\pi^9}{11} - \frac{\pi^{10}}{11} = 15$$

$$10 - \frac{\pi}{11} - \frac{\pi^2}{11} - \frac{\pi^3}{11} - \frac{\pi^4}{11} - \frac{\pi^5}{11} - \frac{\pi^6}{11} - \frac{\pi^7}{11} - \frac{\pi^8}{11} - \frac{\pi^9}{11} - \frac{\pi^{10}}{11} = 60$$

$$11 - \frac{\pi}{11} - \frac{\pi^2}{11} - \frac{\pi^3}{11} - \frac{\pi^4}{11} - \frac{\pi^5}{11} - \frac{\pi^6}{11} - \frac{\pi^7}{11} - \frac{\pi^8}{11} - \frac{\pi^9}{11} - \frac{\pi^{10}}{11} = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$$

$$12 - \frac{\pi}{11} - \frac{\pi^2}{11} - \frac{\pi^3}{11} - \frac{\pi^4}{11} - \frac{\pi^5}{11} - \frac{\pi^6}{11} - \frac{\pi^7}{11} - \frac{\pi^8}{11} - \frac{\pi^9}{11} - \frac{\pi^{10}}{11} = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$$

$$13 - \frac{\pi}{11} - \frac{\pi^2}{11} - \frac{\pi^3}{11} - \frac{\pi^4}{11} - \frac{\pi^5}{11} - \frac{\pi^6}{11} - \frac{\pi^7}{11} - \frac{\pi^8}{11} - \frac{\pi^9}{11} - \frac{\pi^{10}}{11} = \frac{1}{4}$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ جب  $\frac{\pi}{11}$  ذیل کی مساوات کی ایک اصل ہے

$$x^{11} - 1 = 0$$



## باب چہارم

کسی زاویہ کے اضلاع کی جیوب اور جیوب التمام کے پھیلاؤ

اور جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کی تفصیلیں

[پہلی خواندگی کے وقت طالب علم دفعہ ۴۸ سے باب ہذا کے انتہا تک بھڑکتا ہے]  
۴۲۔ اس باب میں پہلے ہم یہ بتائیے کہ کس طرح سے کسی زاویہ کی جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کی تفصیلیں اس زاویہ کے اضلاع کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کی جاسکتی ہیں اور پھر یہ بتائیے کہ کس طرح سے ایک زاویہ کے کسی ضلع کی جیوب اور جیوب التمام کو زاویہ مذکورہ کی جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کے سلسلوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔

اس باب میں ن سے ہر جگہ ایک مثبت صحیح عدد مراد لی جائیگی۔  
۴۳۔ فرض کرو کہ

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} \\ \text{پس لا} &= \frac{\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}}{\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}} \\ &= \frac{\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}}{\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}} \\ &= \frac{\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}}{\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}} \\ &= \frac{\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}}{\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}} \end{aligned}$$

اور لا -  $\frac{1}{لا} = ۲$  خ جب ط

نیز ڈی مائیرے کے مسئلہ سے ثابت ہے کہ

لا<sup>ن</sup> = جم ن ط + خ جب ن ط

لا<sup>ن</sup> = جم ن ط - خ جب ن ط

لہذا لا<sup>ن</sup> +  $\frac{1}{لا} = ۲$  جم ن ط

اور لا<sup>ن</sup> -  $\frac{1}{لا} = ۲$  خ جب ن ط

۴۴۔ جم ط کی تفصیل ط کے اضعاٹ کی جیوب اتمام کی رقوم میں معلوم کرو۔

اس جگہ ن سے مراد کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

دفعہ ماسبق سے ظاہر ہے کہ

(۲ جم ط<sup>ن</sup>) = (لا<sup>ن</sup> +  $\frac{1}{لا}$ )<sup>ن</sup>

= لا<sup>ن</sup> + ن لا<sup>ن-۱</sup> +  $\frac{1}{لا}$  +  $\frac{ن(ن-۱)}{۲ لا^{ن-۲}}$  + ..... +  $\frac{1}{لا^{۲}}$

+  $\frac{ن(ن-۱)}{۲ لا^{ن-۲}}$  +  $\frac{1}{لا^{ن-۲}}$  + ن لا<sup>ن-۱</sup> +  $\frac{1}{لا^{ن-۱}}$  +  $\frac{1}{لا^{ن}}$

= لا<sup>ن</sup> + ن لا<sup>ن-۲</sup> +  $\frac{ن(ن-۱)}{۲ لا^{ن-۲}}$  + ..... +  $\frac{1}{لا^{۲}}$

+  $\frac{ن(ن-۱)}{۲ لا^{ن-۲}}$  +  $\frac{1}{لا^{ن-۲}}$  + ن لا<sup>ن-۱</sup> +  $\frac{1}{لا^{ن-۱}}$  + ..... (۱)

پہلی رقم کو آخری رقم کے ساتھ دوسری رقم کو آخر کی طرف سے دوسری رقم کے ساتھ اور علی ہذا القیاس ..... لینے سے

(۲ جم ط<sup>ن</sup>) = (لا<sup>ن</sup> +  $\frac{1}{لا}$ )<sup>ن</sup> + ن (لا<sup>ن-۱</sup> +  $\frac{1}{لا^{ن-۱}}$ )

+  $\frac{ن(ن-۱)}{۲ لا^{ن-۲}}$  + ..... +  $\frac{1}{لا^{۲}}$  + (لا<sup>ن-۲</sup> +  $\frac{1}{لا^{ن-۲}}$ )

لیکن دفعہ ماقبل کی رو سے

$$\text{جم } ۲ \text{ ن ط} = \frac{۱}{۲} + \text{جم } ۱ \text{ ن ط}$$

$$\text{اور لا } ۲ - \text{جم } ۲ \text{ ن ط} = \frac{۱}{۲} + \text{جم } ۲ \text{ (ن-۲) ط}$$

وغیرہ ..... وغیرہ .....

$$\text{پس } ۲ \text{ جم } ۲ \text{ ن ط} = ۲ \text{ جم } ۲ \text{ ن ط} + \text{جم } ۲ \text{ (ن-۲) ط}$$

$$+ \frac{\text{جم } ۲ \text{ (ن-۲) ط}}{۲} + \dots$$

یعنی ۲-جم ط = جم ن ط + جم (ن-۲) ط +  $\frac{\text{جم } ۲ \text{ (ن-۲) ط}}{۲} + \dots$  (۲) اگر ن طاق ہو تو مساوات (۱) کے بائیں جانب رقوم کی تعداد جفت ہوگی۔ اس لئے دو دو رقوم کے زوج پورے ہو جائیں گے۔ اور کوئی رقم ایسی نہ بیگی۔ اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ آخری رقم میں جم ط شامل ہوگا۔

لیکن اگر ن کوئی جفت عدد ہو تو مساوات (۱) کی بائیں جانب کے رکن میں رقوم کی تعداد طاق ہوگی۔ اس لئے جملہ ازواج پورے کرنے کے بعد ایک رقم بچ جائیگی جس میں لا شامل نہیں ہوگا۔ اس کو ۲ پر تقسیم کرنے سے جو رقم حاصل ہوگی وہی رقم سلسلہ (۲) کی آخری رقم ہوگی۔

یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو آخری رقم

$$\frac{\frac{۱+ن}{۲}}{۲}$$

ہوگی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم  $\frac{1}{2}$  (ن) ہوگی۔

۴۵- مشتق ۱- حجم ط کوط کے اضلاع کی جیوب تمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

یہ معلوم ہے کہ (۲ حجم ط) = (۱/۸ + ۷) =

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xy} \times 1 + \frac{1}{xy} \times 2 + \frac{1}{xy} \times 3 + \dots + \frac{1}{xy} \times 99 + \frac{1}{xy} \times 100 = \frac{1}{xy} \times 5050 = \frac{5050}{xy}$$

$$(\frac{1}{r_1} + \hat{y}) r_1 + (\frac{1}{r_2} + \hat{y}) r_2 + (\frac{1}{r_3} + \hat{y}) r_3 =$$

$$C_0 + \left( \frac{1}{r} + \frac{r}{2} \right) \Delta r +$$

$$L_0 + b_2 \beta_2 \times 0.7 + b_3 \beta_3 \times 0.8 + b_4 \beta_4 \times 1 + b_5 \beta_5 \times 1 =$$

مثق ۲۔ جم ط کو ط کے اضعات کی حیوب اتمام کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔

مشق ۲۔ جم ط کو ط کے اضعات کی جیوب التمام کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔

$$\left(\frac{1}{n} + 2\right) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{r!} + \frac{1}{(r+1)!} + \dots = e - 1$$

$$\left(\frac{1}{y} + \overset{1}{y}\right) r_0 + \left(\frac{1}{xy} + \overset{1}{y}\right) r_1 + \left(\frac{1}{xy} + \overset{1}{y}\right) c + \left(\frac{1}{xy} + \overset{1}{y}\right) =$$

$$b_1 \times 35 + b_2 \times 21 + b_3 \times 4 + b_4 \times 2 =$$

$$\therefore \text{جم}^6 ط = \text{جم}^4 ط + \text{جم}^5 ط + \text{جم}^3 ط + \text{جم}^2 ط$$

۴۔ جب ٹپ کی تفصیل جب ن جفت ہو تو ط کے اضعا ف کی جیوب ا التمام کی رقوم میں اور جب ن طاق ہو تو ط کے اضعا ف کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو

وقفہ ۳۳ کی رو سے

۳ رخ جب ط = لا - ۱۱

اس لئے  $\frac{1}{n} \times \text{جینٹل} = \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$  ..... (۱)

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے۔ تب (۱) کی تفصیل

میں آخری رقم +  $\frac{1}{n}$  ہوگی۔

نیز چونکہ  $\frac{1}{n} = (1 - \frac{1}{n})$

اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

$$\frac{1}{n} = (1 - \frac{1}{n}) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$+ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \dots - \frac{1}{n^{m-1}} + \frac{1}{n^m}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m}$$

$$\therefore \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^m}$$

$$+ \frac{1}{n^m} - \frac{1}{n^{m+1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{m+1}} \quad (3)$$

چونکہ  $n$  جفت ہے اس لئے مساوات (۲) کے بائیں جانب کی رقموں کی تعداد طاق ہوگی۔ لہذا درمیانی رقم میں لا شامل نہ ہوگا، اسکو ۲ پر تقسیم کرنے سے جو رقم حاصل ہوگی وہی رقم مساوات (۳) کی آخری رقم ہوگی۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ آخری رقم  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^{m+1}}$  ہوگی۔



صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے

تب سلسلہ (۱) میں آخری رقم  $\frac{1}{2}$  ہو گی۔

نیز چونکہ  $ن \times ۲ = ن \times ۱ = ن$  (۱-۲)  $\frac{1}{2}$  اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

$$۲ \times ۲ \times (۱-۲) \frac{1}{2} = ۲ \times ۱ \times (۱-۲) \frac{1}{2} + ۱ \times (۱-۲) \frac{1}{2} \times ۲ \dots$$

$$\dots - \frac{ن(۱-۲)}{۲} \frac{1}{۲-۱} + \frac{۱}{۲-۱} ن - \frac{۱}{۲-۱} \frac{1}{۲-۱}$$

$$= \left( \frac{۱}{۲-۱} - \frac{۱}{۲-۱} \right) ن - \left( \frac{۱}{۲-۱} - \frac{۱}{۲-۱} \right)$$

$$+ \frac{ن(۱-۲)}{۲} \left( \frac{۱}{۲-۱} - \frac{۱}{۲-۱} \right) \dots (۴)$$

اب بموجب دفعہ (۴)  $\frac{۱}{۲-۱} = ۲ \times جب ن ط$

$$\frac{۱}{۲-۱} = ۲ \times جب (۲-ن) ط$$

.....  
 لہذا مساوات (۴) ہو جاتی ہے:

$$۲ \times (۱-۲) \frac{1}{2} = ۲ \times جب ن ط$$

$$- ۲ \times جب (۲-ن) ط + \frac{ن(۱-۲)}{۲} ۲ \times جب (۲-ن) ط - \dots$$

$$یعنی ۲ \times (۱-۲) \frac{1}{2} = ۲ \times جب ن ط - ۲ \times جب (۲-ن) ط$$

$$+ \frac{ن(۱-۲)}{۲} ۲ \times جب (۲-ن) ط - \dots (۵)$$

چونکہ صورت ہذا میں ن طاق ہے اس لئے مساوات (۴) کی بائیں جانب تعدادِ رقوم جفت ہوگی۔ پس کل رقوم دو دو رقوم کے ازواج میں پوری تقسیم ہو جائیں گی اور کوئی رقم اکیلی نہ بچے گی، لہذا (۵) کی آخری رقم میں جب طہ شامل ہوگا۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ آخری رقم  $(-1)^{n-1} \frac{n!}{2}$  جب

ہوگی۔  
۴۷۔ مشق ۱۔ جب طہ کی تفصیل طہ کے اعضا کی حیثیت کی تمام  
کی رقوم میں معلوم کرو۔  
یہ معلوم ہے کہ

$$2x^2 \text{ جب } x = 2 \Rightarrow (2 - \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{75} + \frac{1}{75} \times 7 - \frac{1}{75} \times 15 + 2 - \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \times 7 - \frac{2}{15} =$$

اسٹے۔ ۲ جب ۲ طہ =  $(\frac{1}{49} + \frac{7}{14}) - (\frac{1}{49} + \frac{7}{14}) + (\frac{1}{49} + \frac{7}{14}) - (\frac{1}{49} + \frac{7}{14}) = 0$

$$20 - 2 \times 15 + 4 \times 4 - 2 =$$

۱۰- ۲ جیب طه = جم ۶ طه - ۶ جم ۴ طه + ۱۵ جم ۲ طه - ۱۰

**مشق ۲-** جب طہ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی حیثیت کی رقوم میں معلوم کردہ  
 ظاہر ہے کہ  $\frac{1}{2} \times \text{جب طہ} = (1 - \frac{1}{2})$

$$\frac{1}{2y} - \frac{1}{5y} x + \frac{1}{7y} x^2 - \frac{1}{9y} x^3 + \frac{1}{11} x^4 - \frac{1}{13} x^5 + \frac{1}{15} x^6 - \frac{1}{17} x^7 + \frac{1}{19} x^8 - \frac{1}{21} x^9 + \frac{1}{23} x^{10} - \frac{1}{25} x^{11} + \frac{1}{27} x^{12} - \frac{1}{29} x^{13} + \frac{1}{31} x^{14} - \frac{1}{33} x^{15} + \frac{1}{35} x^{16} - \frac{1}{37} x^{17} + \frac{1}{39} x^{18} - \frac{1}{41} x^{19} + \frac{1}{43} x^{20} - \frac{1}{45} x^{21} + \frac{1}{47} x^{22} - \frac{1}{49} x^{23} + \frac{1}{51} x^{24} - \frac{1}{53} x^{25} + \frac{1}{55} x^{26} - \frac{1}{57} x^{27} + \frac{1}{59} x^{28} - \frac{1}{61} x^{29} + \frac{1}{63} x^{30} - \frac{1}{65} x^{31} + \frac{1}{67} x^{32} - \frac{1}{69} x^{33} + \frac{1}{71} x^{34} - \frac{1}{73} x^{35} + \frac{1}{75} x^{36} - \frac{1}{77} x^{37} + \frac{1}{79} x^{38} - \frac{1}{81} x^{39} + \frac{1}{83} x^{40} - \frac{1}{85} x^{41} + \frac{1}{87} x^{42} - \frac{1}{89} x^{43} + \frac{1}{91} x^{44} - \frac{1}{93} x^{45} + \frac{1}{95} x^{46} - \frac{1}{97} x^{47} + \frac{1}{99} x^{48} - \frac{1}{101} x^{49} + \frac{1}{103} x^{50} - \frac{1}{105} x^{51} + \frac{1}{107} x^{52} - \frac{1}{109} x^{53} + \frac{1}{111} x^{54} - \frac{1}{113} x^{55} + \frac{1}{115} x^{56} - \frac{1}{117} x^{57} + \frac{1}{119} x^{58} - \frac{1}{121} x^{59} + \frac{1}{123} x^{60} - \frac{1}{125} x^{61} + \frac{1}{127} x^{62} - \frac{1}{129} x^{63} + \frac{1}{131} x^{64} - \frac{1}{133} x^{65} + \frac{1}{135} x^{66} - \frac{1}{137} x^{67} + \frac{1}{139} x^{68} - \frac{1}{141} x^{69} + \frac{1}{143} x^{70} - \frac{1}{145} x^{71} + \frac{1}{147} x^{72} - \frac{1}{149} x^{73} + \frac{1}{151} x^{74} - \frac{1}{153} x^{75} + \frac{1}{155} x^{76} - \frac{1}{157} x^{77} + \frac{1}{159} x^{78} - \frac{1}{161} x^{79} + \frac{1}{163} x^{80} - \frac{1}{165} x^{81} + \frac{1}{167} x^{82} - \frac{1}{169} x^{83} + \frac{1}{171} x^{84} - \frac{1}{173} x^{85} + \frac{1}{175} x^{86} - \frac{1}{177} x^{87} + \frac{1}{179} x^{88} - \frac{1}{181} x^{89} + \frac{1}{183} x^{90} - \frac{1}{185} x^{91} + \frac{1}{187} x^{92} - \frac{1}{189} x^{93} + \frac{1}{191} x^{94} - \frac{1}{193} x^{95} + \frac{1}{195} x^{96} - \frac{1}{197} x^{97} + \frac{1}{199} x^{98} - \frac{1}{201} x^{99} + \frac{1}{203} x^{100} - \frac{1}{205} x^{101} + \frac{1}{207} x^{102} - \frac{1}{209} x^{103} + \frac{1}{211} x^{104} - \frac{1}{213} x^{105} + \frac{1}{215} x^{106} - \frac{1}{217} x^{107} + \frac{1}{219} x^{108} - \frac{1}{221} x^{109} + \frac{1}{223} x^{110} - \frac{1}{225} x^{111} + \frac{1}{227} x^{112} - \frac{1}{229} x^{113} + \frac{1}{231} x^{114} - \frac{1}{233} x^{115} + \frac{1}{235} x^{116} - \frac{1}{237} x^{117} + \frac{1}{239} x^{118} - \frac{1}{241} x^{119} + \frac{1}{243} x^{120} - \frac{1}{245} x^{121} + \frac{1}{247} x^{122} - \frac{1}{249} x^{123} + \frac{1}{251} x^{124} - \frac{1}{253} x^{125} + \frac{1}{255} x^{126} - \frac{1}{257} x^{127} + \frac{1}{259} x^{128} - \frac{1}{261} x^{129} + \frac{1}{263} x^{130} - \frac{1}{265} x^{131} + \frac{1}{267} x^{132} - \frac{1}{269} x^{133} + \frac{1}{271} x^{134} - \frac{1}{273} x^{135} + \frac{1}{275} x^{136} - \frac{1}{277} x^{137} + \frac{1}{279} x^{138} - \frac{1}{281} x^{139} + \frac{1}{283} x^{140} - \frac{1}{285} x^{141} + \frac{1}{287} x^{142} - \frac{1}{289} x^{143} + \frac{1}{291} x^{144} - \frac{1}{293} x^{145} + \frac{1}{295} x^{146} - \frac{1}{297} x^{147} + \frac{1}{299} x^{148} - \frac{1}{301} x^{149} + \frac{1}{303} x^{150} - \frac{1}{305} x^{151} + \frac{1}{307} x^{152} - \frac{1}{309} x^{153} + \frac{1}{311} x^{154} - \frac{1}{313} x^{155} + \frac{1}{315} x^{156} - \frac{1}{317} x^{157} + \frac{1}{319} x^{158} - \frac{1}{321} x^{159} + \frac{1}{323} x^{160} - \frac{1}{325} x^{161} + \frac{1}{327} x^{162} - \frac{1}{329} x^{163} + \frac{1}{331} x^{164} - \frac{1}{333} x^{165} + \frac{1}{335} x^{166} - \frac{1}{337} x^{167} + \frac{1}{339} x^{168} - \frac{1}{341} x^{169} + \frac{1}{343} x^{170} - \frac{1}{345} x^{171} + \frac{1}{347} x^{172} - \frac{1}{349} x^{173} + \frac{1}{351} x^{174} - \frac{1}{353} x^{175} + \frac{1}{355} x^{176} - \frac{1}{357} x^{177} + \frac{1}{359} x^{178} - \frac{1}{361} x^{179} + \frac{1}{363} x^{180} - \frac{1}{365} x^{181} + \frac{1}{367} x^{182} - \frac{1}{369} x^{183} + \frac{1}{371} x^{184} - \frac{1}{373} x^{185} + \frac{1}{375} x^{186} - \frac{1}{377} x^{187} + \frac{1}{379} x^{188} - \frac{1}{381} x^{189} + \frac{1}{383} x^{190} - \frac{1}{385} x^{191} + \frac{1}{387} x^{192} - \frac{1}{389} x^{193} + \frac{1}{391} x^{194} - \frac{1}{393} x^{195} + \frac{1}{395} x^{196} - \frac{1}{397} x^{197} + \frac{1}{399} x^{198} - \frac{1}{401} x^{199} + \frac{1}{403} x^{200} - \frac{1}{405} x^{201} + \frac{1}{407} x^{202} - \frac{1}{409} x^{203} + \frac{1}{411} x^{204} - \frac{1}{413} x^{205} + \frac{1}{415} x^{206} - \frac{1}{417} x^{207} + \frac{1}{419} x^{208} - \frac{1}{421} x^{209} + \frac{1}{423} x^{210} - \frac{1}{425} x^{211} + \frac{1}{427} x^{212} - \frac{1}{429} x^{213} + \frac{1}{431} x^{214} - \frac{1}{433} x^{215} + \frac{1}{435} x^{216} - \frac{1}{437} x^{217} + \frac{1}{439} x^{218} - \frac{1}{441} x^{219} + \frac{1}{443} x^{220} - \frac{1}{445} x^{221} + \frac{1}{447} x^{222} - \frac{1}{449} x^{223} + \frac{1}{451} x^{224} - \frac{1}{453} x^{225} + \frac{1}{455} x^{226} - \frac{1}{457} x^{227} + \frac{1}{459} x^{228} - \frac{1}{461} x^{229} + \frac{1}{463} x^{230} - \frac{1}{465} x^{231} + \frac{1}{467} x^{232} - \frac{1}{469} x^{233} + \frac{1}{471} x^{234} - \frac{1}{473} x^{235} + \frac{1}{475} x^{236} - \frac{1}{477} x^{237} + \frac{1}{479} x^{238} - \frac{1}{481} x^{239} + \frac{1}{483} x^{240} - \frac{1}{485} x^{241} + \frac{1}{487} x^{242} - \frac{1}{489} x^{243} + \frac{1}{491} x^{244} - \frac{1}{493} x^{245} + \frac{1}{495} x^{246} - \frac{1}{497} x^{247} + \frac{1}{499} x^{248} - \frac{1}{501} x^{249} + \frac{1}{503} x^{250} - \frac{1}{505} x^{251} + \frac{1}{507} x^{252} - \frac{1}{509} x^{253} + \frac{1}{511} x^{254} - \frac{1}{513} x^{255} + \frac{1}{515} x^{256} - \frac{1}{517} x^{257} + \frac{1}{519} x^{258} - \frac{1}{521} x^{259} + \frac{1}{523} x^{260} - \frac{1}{525} x^{261} + \frac{1}{527} x^{262} - \frac{1}{529} x^{263} + \frac{1}{531} x^{264} - \frac{1}{533} x^{265} + \frac{1}{535}$$

$$(\frac{1}{21} - 2)35 - (\frac{1}{21} - 2)21 + (\frac{1}{21} - 2)4 - (\frac{1}{21} - 2) =$$

۱۔ ۲ مغز جب طہ = ۲ خر جب طہ - ۲ خر جب طہ ۵ طہ

۲۱ + ۲ خر جب طہ ۳ طہ - ۳۵ ۲ خر جب طہ

۲۔ ۲ جب طہ = جب طہ - ۴ جب طہ ۵ طہ + ۲۱ جب طہ ۳ طہ - ۳۵ جب طہ

مشق ۳۔ جم طہ جب طہ کی تفصیل طہ کے اضلاع کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ ۲ جم طہ = (لا + لا) اور ۴ خر جب طہ = (لا - لا) اسلئے ۲ خر جم طہ جب طہ = (لا - لا) (لا - لا)

$$= [لا - لا + لا - لا] [لا - لا + لا - لا] =$$

$$= (لا - لا) (لا - لا) - (لا - لا) (لا - لا) + (لا - لا) (لا - لا) - (لا - لا) (لا - لا)$$

$$+ ۵ (لا - لا) - ۲۰ (لا - لا)$$

لہذا حسب سابق

۲۔ ۲ جم طہ جب طہ = جب ۱۲ طہ - ۲ جب ۱۰ طہ - ۴ جب ۸ طہ

+ ۱۰ جب ۶ طہ + ۵ جب ۴ طہ - ۲۰ جب ۲ طہ

## امثلہ ۷

ثابت کرو کہ

$$۱۔ جب طہ = \frac{۱}{۱۶} [جب طہ - ۵ جب ۳ طہ + ۱۰ جب طہ]$$

$$۲۔ جم طہ = \frac{۱}{۲۵۶} [جم ۹ طہ + جم ۹ طہ + جم ۳۶ طہ + جم ۵ طہ + جم ۸۴ طہ + جم ۳ طہ + ۱۲۶ جم طہ]$$

$$۳۔ جم طہ = \frac{۱}{۵۱۲} [جم ۱۰ طہ + جم ۸ طہ + جم ۶ طہ + جم ۴ طہ + جم ۲ طہ + جم ۱۰ طہ + جم ۲ طہ + ۱۲۶ جم طہ]$$

$$۴ - جب ن ط = \frac{۱}{۱۲۸} [جم ۸ ط - جم ۶ ط + جم ۴ ط - جم ۲ ط + ۳۵ ط]$$

$$۵ - جب ۹ ط = \frac{۱}{۲۵۶} [جب ۹ ط - جب ۷ ط + جب ۵ ط + ۳۶ ط]$$

$$- ۸۴ جب ۳ ط + ۱۲۶ جب ط]$$

$$۶ - ۲ جب ۲ ط جم ط = جم ۶ ط - جم ۴ ط - جم ۲ ط + ۲ ط$$

$$۷ - ۲ جب ۲ ط جم ط = جب ۷ ط - جب ۵ ط + جب ۳ ط + ۵ جب ط$$

$$۸ - ۲ جب ۲ ط جم ط = جب ۱۱ ط + ۵ جب ۹ ط + جب ۷ ط - ۵ جب ۵ ط$$

$$- ۲۲ جب ۳ ط - ۱۴ جب ط$$

$$۳۸ - جب ن ط کی تفصیل جم ط کی نزولی قوتوں کے سلسلہ$$

میں معلوم کرو۔

اگر لا > ا تو

$$۱ - ۲ لا جم ط + ا = جب ط + لا جب ۲ ط + لا جب ۳ ط$$

$$+ ..... + لا - ا جب ن ط + ..... تا انتہی ..... (۱)$$

اس کو ثابت کرنے کے لئے دونوں جانب ا - ۲ لا جم ط + لا سے ضرب دو تو دائیں طرف کا رکن جب ط کے مساوی ہوگا۔

اس کا باضابطہ ثبوت باب ہشتم میں دیا جائے گا۔

مساوات (۱) میں لا کے سروں کو برابر کرنے سے

$$جب ن ط = لا - ا کا سر [۱ - ۲ لا جم ط + لا] کی تفصیل میں$$

$$= لا - ا کا سر [۱ - لا (۲ جم ط - لا)] کی تفصیل میں$$

$$\begin{aligned}
 &= (لا-۱) کا سر ۱ + (لا) (۲ جم ط - لا) + (لا) (۲ جم ط - لا) + ..... \\
 &+ (لا-۲) (۲ جم ط - لا) + (لا-۱) (۲ جم ط - لا) + (لا) (۲ جم ط - لا) + ..... \\
 &+ (لا) (۲ جم ط - لا) + ..... میں ..... (۲) \\
 &اب (لا-۱) کا سر (لا-۱) (۲ جم ط - لا) کی تفصیل میں \\
 &= (۲ جم ط - لا) - ۱ \\
 &لا-۱ کا سر (لا-۲) (۲ جم ط - لا) کی تفصیل میں \\
 &= لا کا سر (۲ جم ط - لا) کی تفصیل میں \\
 &= (لا-۲) (۲ جم ط - لا) - ۲ \\
 &اسی طرح سے (لا-۱) کا سر (لا-۱) (۲ جم ط - لا) کی تفصیل میں \\
 &= لا کا سر (۲ جم ط - لا) کی تفصیل میں \\
 &= \frac{(لا-۳)(۲-۳)}{۲} (۲ جم ط - لا) - ۵
 \end{aligned}$$

علیٰ ہذا یقیناً

اس نئے مندرجہ بالا طریقہ کے بموجب مساوات (۲) کی تمام رقوم میں سے (لا-۱) کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\begin{aligned}
 &\text{جب ن ط} = \frac{(۲ جم ط - لا) - ۱}{۲} + \frac{(لا-۳)(۲-۳)}{۲} (۲ جم ط - لا) - ۵ \\
 &+ \frac{(لا-۵)(۲-۵)}{۲} (۲ جم ط - لا) - ۷ + .....
 \end{aligned}$$

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو سلسلہ بالا کی آخری رقم

(۱)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ہوگی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم  $(\frac{1}{4} - \frac{1}{8})$  و جم طہ ہوگی  
۴۹۔ جم ن طہ کی تفصیل جم طہ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ  
میں معلوم کرو۔

اگر  $\frac{1}{2} > 1$  تو

۱۔ لا<sup>۲</sup>

$$۱ - ۲ لا جم طہ + لا^۲ = ۱ + ۲ لا جم طہ + ۲ لا جم طہ$$

۲ لا<sup>۳</sup> جم ۳ طہ + ..... + ۲ لا<sup>۱۰</sup> جم ۱۰ طہ + ..... تا انتہی۔ (۱)  
اس کو ثابت کرنے کے لئے مساوات کے دونوں جانب  
۱۔ لا جم طہ + لا<sup>۲</sup> سے ضرب دو کتب بائیں جانب کا رکن  
۱۔ لا کے مساوی ہو جائے گا۔ اس کا باضابطہ ثبوت باب  
ہشتم میں دیا جائے گا۔

مساوات (۱) میں لا کے سرور کو باہم مساوی کرنے سے  
۲ جم ن طہ = لا کا سر (۱۔ لا<sup>۲</sup>) [۱۔ لا جم طہ + لا<sup>۲</sup>] کی  
تفصیل میں

= لا کا سر۔ لا<sup>۲</sup> کا سر [۱۔ لا (۲ جم طہ۔ لا)] کی تفصیل میں  
= لا کا سر۔ لا<sup>۲</sup> کا سر ذیل کے سلسلہ میں [۱۔ لا (۲ جم طہ۔ لا) + لا<sup>۲</sup> (۲ جم طہ۔ لا)  
+ ..... + لا<sup>۱۰</sup> (۲ جم طہ۔ لا) + لا<sup>۱۱</sup> (۲ جم طہ۔ لا) + .....]  
دفعہ گذشتہ کی طرح رقم لا (۲ جم طہ۔ لا) سے شروع ہو کر لا<sup>۱۰</sup>  
سے سرور کو اکٹھا کرنے سے

$$۲ جم ن طہ = (۲ جم طہ) - (۱ - ۱) (۲ جم طہ) - ۲$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(۲-ن)(۳-ن)}{۲} (۲ جم طہ) - ۲-ن \\
 & - \frac{(۳-ن)(۴-ن)(۵-ن)}{۳} (۲ جم طہ) + ۲-ن \dots \dots \dots \\
 & - [ (۲ جم طہ) - ۲-ن (۳-ن) + (۲ جم طہ) - ۲-ن \frac{(۴-ن)(۵-ن)}{۲} \times (۲ جم طہ) - ۲-ن ] \\
 & [ \dots \dots \dots ] \\
 & = (۲ جم طہ) - ۲-ن (۲ جم طہ) + \left[ (۳-ن) + \frac{(۲-ن)(۳-ن)}{۲} \right] (۲ جم طہ) - ۲-ن \\
 & - \left[ \frac{(۳-ن)(۴-ن)(۵-ن)}{۳} + \frac{(۴-ن)(۵-ن)}{۲} \right] (۲ جم طہ) + ۲-ن \dots \dots \dots \\
 & \text{یعنی بالآخر } ۲ جم ن طہ = (۲ جم طہ) - ۲-ن (۲ جم طہ) - ۲-ن
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{ن(۳-ن)}{۲} (۲ جم طہ) - ۲-ن \\
 & - \frac{ن(۴-ن)(۵-ن)}{۳} (۲ جم طہ) + ۲-ن \dots \dots \dots (۲) \\
 & \text{یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو آخری رقم} \\
 & (۱-۲) ۲-ن (۲ جم طہ) ہوگی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم \\
 & (۱-۳) ۳-ن \times ۲ ہوگی۔
 \end{aligned}$$

۵۰۔ جب ن طہ کی تفصیل جم طہ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔  
حسب دفعہ ۲۸

$$\text{جب ن طہ} = \frac{۱-ن}{۱-۲} [ ۲-۱ لا جم طہ + لا ] - ۱ کی تفصیل میں$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} - \text{کا سر} [1 + \text{لا} (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})] - \text{کی تفصیل میں}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} - \text{کا سر ذیل کے سلسلہ میں} [1 - \text{لا} (\text{لا} - 2 \text{جم طہ}) + \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 - \dots + (-1)^n \text{لا}^n (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^n + \dots]$$

(۱)

صورت اول - فرض کرو کہ ن طاق ہے یعنی ن - ۱ جفت ہے۔ تب ظاہر ہے کہ سلسلہ بالا کی صرف انہی رقوم سے  $\text{لا}^{\text{ن}} - \text{کا کوئی سر}$  حاصل ہو سکتا ہے جن میں ل کی قیمت  $\frac{1}{2} - 1$  یا اس سے زیادہ ہے، لہذا صورت موجودہ میں

$$\text{جب ن طہ} = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{کا سر ذیل کے سلسلہ میں}$$

$$1 - \text{لا} (\text{لا} - 2 \text{جم طہ}) + \dots + (-1)^n \text{لا}^n (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^n + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \text{لا}^{n-1} (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^{n-1} + \dots + (-1)^1 \text{لا}^1 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^1 + \dots$$

دفعہ ۴۸ کی طرح مذکورہ بالا سلسلہ میں سے  $\text{لا}^{\text{ن}} - \text{کا کے سروں کو اکٹھا کرنے سے}$

$$\text{جب ن طہ} = \frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) + \frac{1 - \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) = \frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) + \frac{1 - \text{لا}}{2} (1 - \text{لا})$$

$$= \frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) + \frac{1 - \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) = \frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) + \frac{1 - \text{لا}}{2} (1 - \text{لا})$$

$$= \frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) + \frac{1 - \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) = \frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) + \frac{1 - \text{لا}}{2} (1 - \text{لا})$$

پس جب ن طاق ہو تو بالا آخر

$$\frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) = \frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) + \frac{1 - \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) = \frac{1 + \text{لا}}{2} (1 - \text{لا}) + \frac{1 - \text{لا}}{2} (1 - \text{لا})$$



$$\frac{(ن^۱-۱)(ن^۲-۲)(ن^۳-۳).....(ن^۱۰-۱۰)}{۱} - \text{جم طہ} - \dots - (۱-۱) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲)$$

صورت دوم فرض کرو کہ ن جفت ہے یعنی ن-۱ طاق ہے۔  
سلسلہ (۱) میں صرف اپنی رقوم سے لان-۱ کا کوئی سر حاصل ہو سکتا  
ہے جن میں ر کی قیمت  $\frac{ن}{۲}$  یا اس سے زیادہ ہو۔  
لہذا صورت ایذا میں

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{لان-۱ کا سر ذیل کے سلسلہ میں}$$

$$\begin{aligned} & ۱- (لا-۲-۲) \text{جم طہ} + \dots + (۱-۱) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲) \\ & + (۱-۱) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲) \\ & + (۱-۱) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲) \end{aligned}$$

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \frac{(۱-۱) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲)}{(۱-۱) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲)}$$

پس جب ن جفت ہو تو بالآخر

$$\begin{aligned} & (۱-۱) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} = \text{ن جم طہ} - \frac{\text{ن} (ن^۲-۲)}{۲} \text{جم طہ} \\ & + \frac{\text{ن} (ن^۲-۲) (ن^۳-۳).....(ن^۱۰-۱۰)}{۱} - \text{جم طہ} - \dots - (۱-۱) + \frac{۱-۱۰}{۲} (۲-۲) \text{جم طہ} (۱-۱) + \dots + (۲) \end{aligned}$$

نوٹ۔ یہ معلوم کرنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ دفعہ ہذا کے ہر دو سلسلے دراصل دفعہ ۴۷۸ ہی کا سلسلہ ہیں جبکہ موخر الذکر کواٹا لکھا جائے۔ یہ امر طریقہ ثبوت سے بخوبی واضح ہے اور نیز اس کا بلا واسطہ ثبوت الگ دیا جاسکتا ہے۔

۵۱۔ جم ن طہ کی تفصیل جم طہ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔

بموجب دفعہ ۴۹

$$\begin{aligned}
 & 2. \text{جم } 1 = 1^{\text{ا}} \text{ کاسر} - 1^{\text{ا}} \text{ کاسر}^2 (1 - 2. \text{جم } 1 + 1^{\text{ا}}) \text{ میں} \\
 & = 1^{\text{ا}} \text{ کاسر} - 1^{\text{ا}} \text{ کاسر}^2 \text{ کے سلسلہ ذیل میں} \\
 & 1. (1 - 2. \text{جم } 1) + 1^{\text{ا}} (1 - 2. \text{جم } 1) + \dots + 1^{\text{ا}} (1 - 2. \text{جم } 1) \\
 & (1) + \dots +
 \end{aligned}$$

علم ثلث حصہ دوم ۹۰ جم ن طہ کی صدی تو توں میں

$$\left[ \frac{1-0}{2} \times \frac{1+0}{2} \times \frac{3+0}{2} \times \frac{5-0}{2} \times \frac{7-0}{2} \times \frac{9+0}{2} \times \frac{11-0}{2} \times \frac{13+0}{2} \times \frac{15-0}{2} \times \frac{17+0}{2} \times \frac{19-0}{2} \times \frac{21+0}{2} \times \frac{23-0}{2} \times \frac{25+0}{2} \times \frac{27-0}{2} \times \frac{29+0}{2} \right] \frac{3+0}{2} \frac{1-0}{2}$$

$$+ \dots + (2 \text{ جم طہ})^0$$

$$\therefore (1-0) \frac{1-0}{2} (2 \text{ جم ن طہ})$$

$$= \text{جم طہ} [(1-0) + (1+0)] - \frac{(1+0)(1-0)}{2} \text{ جم طہ} [(3-0) + (3+0)]$$

$$+ \frac{(3+0)(3-0)(1-0)(1+0)}{4} \text{ جم طہ} [(5-0) + (5+0)] + \dots$$

$$+ (1-0) \frac{1-0}{2} (2 \text{ جم طہ})^0$$

پس جب ن طاق ہو تو بالآخر  
(1-0) \frac{1-0}{2} \text{ جم ن طہ}

$$= \text{ن جم طہ} - \frac{(1-0)(1-0)}{2} \text{ جم طہ} + \frac{(1-0)(1-0)(1-0)}{4} \text{ جم طہ}$$

$$- \dots - (1-0) \frac{1-0}{2} \text{ جم طہ} \dots (2)$$

صورت دوم فرض کرو کہ ن جفت ہے۔

جن سروں کی ہمیں ضرورت ہے وہ صرف اپنی رقوم سے حاصل ہو سکتے ہیں جن میں ر کی قیمت  $\frac{2-0}{2}$  یا اس سے زیادہ ہو اس لئے

۲ جم ن طہ = لا کا سر۔ لا کا سر فیل کے سلسلہ میں

$$1 - (لا - لا ۲ جم طہ) + \dots + (1-0) \frac{2-0}{2} لا \frac{2-0}{2} (لا - لا ۲ جم طہ) \frac{2-0}{2}$$



ہی کا سلسلہ (۲) ہیں جبکہ موخر الذکر کو الٹا لکھا جائے۔

۵۲۔ اگر ن طاق ہو تو دفعہ ۵۰ کی مساوات (۲) سے اور دفعہ ۵۱ کی مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ

$$\begin{aligned}
 (۱) \quad & \frac{۱-۱}{۱} \text{ جب ن طہ } = ۱ - \frac{۱-۱}{۱} \text{ جم طہ } + \frac{(۱-۱)(۲-۱)}{۱} \text{ جم طہ} \\
 & - \frac{(۱-۱)(۲-۱)(۳-۱)}{۱} \text{ جم طہ } + \dots \\
 & + (۱-۱) \frac{۱-۱}{۱} (۲ \text{ جم طہ})^{۱-۱} + \dots \dots \dots (۱) \\
 \text{اور (۱) } & \frac{۱-۱}{۱} \text{ جمن طہ } = \text{ن جم طہ} - \frac{(۱-۱)(۲-۱)}{۱} \text{ جم طہ } + \frac{(۱-۱)(۲-۱)(۳-۱)}{۱} \text{ جم طہ} \\
 & + \dots \dots \dots (۱-۱) \frac{۱-۱}{۱} \text{ جم طہ }^{۱-۱} \dots \dots \dots (۲) \\
 \text{ان مساواتوں میں اگر طہ کو } & \frac{۱-۱}{۱} \text{ طہ میں اور بنا بریں جم طہ کو} \\
 \text{جب طہ میں تبدیل کر دیا جائے تو جب ن طہ بدل کر جب (۱-۱) } & \frac{۱-۱}{۱} \text{ ن طہ} \\
 \text{یعنی (۱) } & \frac{۱-۱}{۱} \text{ جم ن طہ اور جمن طہ بدل کر جم (۱-۱) } \frac{۱-۱}{۱} \text{ ن طہ} \\
 \text{یعنی (۱) } & \frac{۱-۱}{۱} \text{ جب ن طہ ہو جائیگا۔} \\
 \text{دفعہ ۵۱ کی مساوات (۱) اور (۲) میں حسبہ تغیر کرنے سے اگر ن} & \\
 \text{طاق ہو تو} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{جمن ن طہ} &= \text{جم طہ} \left\{ ۱ - \frac{۱-۱}{۱} \text{ جب طہ } + \frac{(۱-۱)(۲-۱)}{۱} \text{ جب طہ } \right. \\
 & - \dots \dots \dots (۱-۱) \frac{۱-۱}{۱} \text{ جب طہ }^{۱-۱} \left. \dots \dots \dots (۳) \right. \\
 \text{اور} & \\
 \text{جب ن طہ} &= \text{ن جب طہ} - \frac{(۱-۱)(۲-۱)}{۱} \text{ جب طہ } + \frac{(۱-۱)(۲-۱)(۳-۱)}{۱} \text{ جب طہ}
 \end{aligned}$$

$$+ \dots + (1) \frac{1}{2} \times 2^{1-3} \text{جب ن طہ} \dots \dots \dots (۴)$$

۵۳- نیز اگر ن جفت ہو تو دفعہ ۵۰ کی مساوات (۳) اور دفعہ ۵۱ کی مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب ن طہ}} = \text{ن جمن طہ} \frac{\text{ن} (\text{ن} - 2)}{2} \text{جمن طہ}$$

$$+ \frac{\text{ن} (\text{ن} - 2) (\text{ن} - 4) \dots \dots \dots \text{جمن طہ}}{2} + \dots + (1) \frac{1}{2} + (2 \text{جمن طہ})^{1-3} \dots \dots (۱)$$

$$\text{اور (۱) } \frac{1}{2} \text{جمن ن طہ} = 1 - \frac{\text{ن}^2}{2} \text{جمن طہ} + \frac{\text{ن} (\text{ن} - 2)}{2} \text{جمن طہ} - \dots \dots \dots$$

$$+ (1) \frac{1}{2} \times 2^{1-3} (\text{جمن طہ}) \dots \dots \dots (۲)$$

ان مساواتوں میں اگر طہ کو  $(\frac{1}{2} - \text{طہ})$  میں اور بنا بریں جمن طہ کو جب طہ میں تبدیل کر دیا جائے تو جب ن طہ بدل کر جب  $(\frac{1}{2} - \text{ن طہ})$  یعنی  $(1) \frac{1}{2} + \text{جب ن طہ}$  اور جمن ن طہ بدل کر جمن  $(\frac{1}{2} - \text{ن طہ})$  یعنی  $(1) \frac{1}{2} - \text{جمن ن طہ}$  ہو جائے گا۔

پس حسبہ تغیر کرنے سے اگر ن جفت ہو تو

$$\text{جب ن طہ} = \text{ن جب طہ} - \frac{\text{ن} (\text{ن} - 2)}{2} \text{جب طہ} + \frac{\text{ن} (\text{ن} - 2) (\text{ن} - 4) \dots \dots \dots \text{جب طہ}}{2}$$

$$\dots + (1) \frac{1}{2} + (2 \text{جب طہ})^{1-3} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{اور جمن ن طہ} = 1 - \frac{\text{ن}^2}{2} \text{جب طہ} + \frac{\text{ن} (\text{ن} - 2)}{2} \text{جب طہ}$$

$$+ \dots + (1) \frac{1}{2} \times 2^{1-3} \text{جب ن طہ} \dots \dots \dots (۴)$$

۵۴- اگر ن طاق ہو تو دفعہ ۵۲ کے سلسلے (۱)، (۲) اور اگر ن



۵۵- مشق - ذیل کے سلسلوں کی قیمتیں معلوم کرو

قط طہ + قط (طہ +  $\frac{\pi^2}{6}$ ) + قط (طہ +  $\frac{\pi^2}{6}$ ) + ..... ن بقوں تک  
 قط طہ + قط' (طہ +  $\frac{\pi^2}{6}$ ) + قط' (طہ +  $\frac{\pi^2}{6}$ ) + ..... ن بقوں تک  
 دفعہ ۵۱ کی مساواتوں (۲) اور (۳) سے ہمیں معلوم ہے کہ اگر ن  
 طاق ہو اور جم طہ کو م سے تعبیر کیا جائے تو

$$ن م - \frac{ن(ن-۱)}{۲} م + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۶} م + ..... + \frac{ن-۱}{۲} م$$

$$= (۱- \frac{۱-ن}{۲} جم ن طہ ..... (۱)$$

اور اگر ن جفت ہو تو

$$۱- \frac{ن}{۲} م + \frac{ن(ن-۱)}{۲} م + ..... + \frac{ن-۱}{۲} م$$

$$= (۱- \frac{۱}{۲} جم ن طہ ..... (۲)$$

اب اگر جم ن طہ کی قیمت معلوم ہو تو مساواتوں (۱) (۲) سے جم طہ  
 کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

لیکن چونکہ جم ن طہ = جم (ن طہ +  $\frac{\pi^2}{6}$ ) = جم (ن طہ +  $\frac{\pi^2}{6}$ ) = .....  
 اسلئے ان مساواتوں سے

$$جم (طہ + \frac{\pi^2}{6}) = جم (طہ + \frac{\pi^2}{6}) = جم (طہ + \frac{\pi^2}{6})$$

وغیرہ کی قیمتیں بھی حاصل ہو گئی۔

اسلئے ہر حالت میں قیمتیں حسب ذیل ہو گئی ہیں۔

$$جم طہ = جم (طہ + \frac{\pi^2}{6}) = جم (طہ + \frac{\pi^2}{6}) = ..... ن بقوں تک$$

مساواتوں (۱) (۲) میں م کو  $\frac{۱}{۲}$  کے برابر لکھو اور م سے ضرب دو

تب ذیل کی مساواتیں حاصل ہو گئی۔



### جب ن طاق ہو تو

$$(۱-) \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم ن طہ } \times \text{ ن } - \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲} = \dots\dots\dots (۳)$$

اور جب ن جفت ہو تو

$$(۱-) \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم ن طہ } - \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } + \frac{\text{ن}}{۲} = \dots\dots\dots (۴)$$

ان مساواتوں کی اصلیں

$$\text{قط طہ، قط } (\frac{\pi ۲}{۲} + \text{طہ}) \text{، قط } (\frac{\pi ۲}{۲} + \text{طہ}) \dots\dots\dots$$

ہونگی۔

ان کو با، با، با، با، با سے تعبیر کرو

تب با + با + با + با + با = قیمتوں کا مجموعہ

$$\frac{\text{ن}}{\frac{۱-۱}{۲}} = \frac{\text{ن}}{\frac{۱-۱}{۲}} = \text{ن قط ن طہ (اگر ن طاق ہو)}$$

اور = ۰ (اگر ن جفت ہو)

$$\text{نیز با + با + با + با + با} = \frac{\text{ن}}{۲} = \frac{\text{ن}}{۲} \text{ (اگر ن طاق ہو)}$$

$$\text{جم ن طہ} = \frac{\text{ن}}{۲} \text{ (اگر ن طاق ہو)}$$

$$\text{اور} = \frac{\text{ن}}{۲} = \frac{\text{ن}}{۲} \text{ (اگر ن جفت ہو)}$$

### امثلہ ۹

ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو

$$۱- \text{جم طہ جم } (\frac{\pi ۲}{۲} + \text{طہ}) \text{ جم } (\frac{\pi ۲}{۲} + \text{طہ}) \dots\dots\dots \{ \frac{\pi ۲}{۲} (۱-ن) + \text{طہ} \}$$

۲- جب ط جب (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) جب (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) ..... جب (طہ + (ن -  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ))

۳- قم طہ + قم (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) + قم (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) ..... ن رقموں تک

۴- مس طہ + مس (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) + مس (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) ..... ن رقموں تک

[ذیل کے پانچ سوالوں میں دفعہ ۳۰ کی مساوات (۵) سے شروع کرو]

۵- مس طہ + مس (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) + مس (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) ..... ن رقموں تک

۶- مم طہ + مم (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) + مم (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) ..... ر

۷- مس طہ مس (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) مس (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) ..... ن اجزاء ضربی

۸- مس طہ + مس (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) + مس (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) ..... ن رقموں تک

۹- اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ ق = ۳ ہر = ن - ۱

جہاں ق = ق طہ + ق طہ + ق طہ + ق طہ + ..... (ن - ۱) رقموں تک

اور ہر = قم + قم + قم + قم + ..... (ن - ۱) رقموں تک

۱۰- اگر ق طہ (طہ +  $\frac{۲۲}{۱۱}$ ) میں رکھو صفر سے لیکر ن - ایک تمام

قیمتیں دی جائیں تو جو رقم اس طرح سے حاصل ہوں گی ان میں سے

دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

نوٹ - ابواب مابعد کی خواندگی سے طالب علم کو معلوم ہو جائیگا کہ دفعات ۴۹

اور ۵۱ کے نتائج دفعہ ۱۰ کی مدد سے آسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔

یعنی  $\frac{۲۲}{۱۱}$  طہ = لا کاسر - لوک [۱- لا (۲ جم طہ - لا)] کی تفصیل میں۔

## باب پنجم

سلسلہ قوت ناما ملطف مقداروں کیلئے

تفاعیل مستدیرہ ملطف زاویوں کیلئے۔ زائدی تفاعیل

۵۶۔ اگر لا کوئی حقیقی مقدار ہو تو ہم دفعہ ۵ میں ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\phi = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \dots \dots \dots \text{تالانتاہی} \quad (۱)$$

اگر لا حقیقی نہ ہو بلکہ ملطف ہو یعنی اگر لا  $\lambda = x + iy$  کی شکل کا ہو تو اس صورت میں فی الحال ہم  $\phi$  کو کوئی معنی نہیں پہنچا سکتے۔ فرض کرو کہ ہم اس رقم (یعنی  $\phi$ ) کی تعریف یوں کرتے ہیں کہ لا کی تمام قیمتوں کے واسطے (خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا ملطف)  $\phi$  سے مراد ذیل کا سلسلہ ہے۔

$$1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \dots \dots \dots \text{تالانتاہی} \dots \dots (۲)$$

۵۷۔ ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر لا ملطف ہو تو یہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ لا = ر (جسم طہ + لا = جب طہ)

$$\text{تب } \frac{1}{\text{لا}} = 1 + \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}^2} + \frac{1}{\text{لا}^3} + \dots \dots \dots \text{تالانتاہی}$$

$$= 1 + \frac{1}{\text{ر}} (\text{جسم طہ} + \text{لا} = \text{جب طہ}) + \frac{1}{\text{ر}^2} (\text{جسم ۲ طہ} + \text{لا} = \text{جب ۲ طہ}) + \frac{1}{\text{ر}^3} (\text{جسم ۳ طہ} + \text{لا} = \text{جب ۳ طہ}) + \dots \dots \dots$$

تالانتاہی

$$= 1 + \frac{1}{\text{ر}} \text{جسم طہ} + \frac{1}{\text{ر}^2} \text{جسم ۲ طہ} + \frac{1}{\text{ر}^3} \text{جسم ۳ طہ} + \dots \dots \dots$$

$$+ \text{لا} = \left[ \text{رجب طہ} + \frac{1}{\text{ر}} \text{رجب ۲ طہ} + \frac{1}{\text{ر}^2} \text{رجب ۳ طہ} + \dots \dots \dots \right]$$

$$\text{مقدار } 1 + \frac{1}{\text{ر}} \text{جسم طہ} + \frac{1}{\text{ر}^2} \text{جسم ۲ طہ} + \frac{1}{\text{ر}^3} \text{جسم ۳ طہ} + \dots \dots \dots \text{تالانتاہی}$$

$$> 1 + \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^3} + \dots \dots \dots \text{تالانتاہی}$$

اور چونکہ موخر الذکر سلسلہ ر کی تمام حقیقی قیمتوں کے واسطے مستحق

ہے اس لئے پہلا سلسلہ بھی مستحق ہے ..... (دفعہ ۶)

اسی طرح سے سلسلہ

$$\text{رجب طہ} + \frac{1}{\text{ر}} \text{رجب ۲ طہ} + \frac{1}{\text{ر}^2} \text{رجب ۳ طہ} + \dots \dots \dots$$

بھی مستحق ہے۔

پس ثابت ہوا کہ لا کا سلسلہ ہمیشہ مستحق ہوتا ہے۔

۵۸۔ پس اگر لا کوئی ملحق مقدار ہو تو لا کا سلسلہ

$$1 + \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}^2} + \frac{1}{\text{لا}^3} + \dots \dots \dots$$

کو لکھنے کا ایک مختصر طریقہ ہوا۔

یاد رہے کہ سوائے اُس صورت کے کہ جب لا حقیقی ہو، مقدار  $\omega$  میں  $\omega$  سے مراد سلسلہ

$$1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \dots$$

نہیں ہے۔

جب لا ملطف ہو تو  $\omega$  اُسی شکل کے ایک سلسلہ کو تعبیر کرتا ہے جو سلسلہ کہ لا کے حقیقی ہونے کی صورت میں

$$(1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \dots)$$

کے برابر ثابت کیا جا چکا ہے۔

۵۹۔ اُسی قسم کے ثبوت سے جو سی سمتھ کے ابجرا دفعہ ۳۰۴ میں دیا گیا ہے یہ آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ

$$\omega = \omega + \omega^2$$

جہاں لا اور ما خواہ حقیقی ہوں خواہ ملطف۔

پس لا اور ما کے ملطف ہونے کی صورت میں بھی تفاعل  $\omega$  اور  $\omega^2$  قوت نا کے معمولی ضوابط کے تابع رہتے ہیں۔

۶۰۔ اگر لا کی بجائے  $\omega^2$  رکھا جائے جہاں طہ حقیقی ہے تو

$$\omega^2 = 1 + \omega^2 + \frac{\omega^4}{\omega^2} + \frac{\omega^6}{\omega^2} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{\omega^4}{\omega^2} - \frac{\omega^6}{\omega^2} + \dots$$

$$+ \omega^2 \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{\omega^4}{\omega^2} - \frac{\omega^6}{\omega^2} + \dots \right]$$

$$= \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ} \dots \dots \dots (\text{دفعات } ۳۲, ۳۳)$$

$$\text{لہذا قوہ} = \text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}$$

$$\text{پس عمل جمع سے جم طہ} = \frac{\text{قوہ طہ} + \text{قوہ خ}}{۲}$$

$$\text{اور عمل تفریق سے جب طہ} = \frac{\text{قوہ طہ} - \text{قوہ خ}}{۲}$$

### ملف زاویوں کے تفاعیل مستدیرہ

۶۱۔ اگر لاکوئی ملف مقدار ہو تو اب تک تفاعیل جب لا اور جم لا کو کوئی معنی نہیں دئے جا سکتے۔

ہم پہلے دفعات ۳۲، ۳۳ میں ثابت کر چکے ہیں کہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے واسطے

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۶} - \frac{\text{لا}^۴}{۲۴} + \dots \dots \dots \text{تالا تناہی}$$

اور جم لا = ۱ -  $\frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۶} - \frac{\text{لا}^۴}{۲۴} + \dots \dots \dots$  تالا تناہی  
فرض کرو کہ ہم جب لا اور جم لا کی تعریف ہی اس طرح کرتے ہیں کہ لا کے ملف ہونے کی صورت میں ان سے بالترتیب اوپر کے سلسلے مراد ہوتے ہیں، یعنی فرض کرو کہ

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۶} - \frac{\text{لا}^۴}{۲۴} + \dots \dots \dots \text{تالا تناہی (۱)}$$

$$\text{اور جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{لا}^۳}{۶} - \frac{\text{لا}^۴}{۲۴} + \dots \dots \dots \text{تالا تناہی (۲)}$$

جس صورت میں لا ملف ہو تو سلاسل بالا کی بائیں جانب کے

رکنوں کو بالتفصیل لکھنے کی بجائے ہم ان کو محض اختصار کی خاطر جب لا اور جم لا سے تعبیر کرتے ہیں۔

۶۲۔ تب لا کی تمام (حقیقی یا ملف) قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم لا} + \text{خ جب لا} = ۱ + \text{خ لا} - \frac{\text{لا}}{۲} - \frac{\text{خ لا}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۲} + \dots$$

$$= ۱ + \text{خ لا} + \frac{\text{خ لا}}{۲} + \frac{\text{خ لا}}{۲} + \frac{\text{خ لا}}{۲} + \dots + \frac{\text{خ لا}}{۲} = \text{خ لا} \dots \dots \dots (\text{دفعہ ۵۶})$$

لہذا جم لا۔ خ جب لا = خ لا

پس لا کی تمام حقیقی یا ملف قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم لا} = \frac{\text{خ لا}}{۲} - \frac{\text{خ لا}}{۲} \text{ اور جب لا} = \frac{\text{خ لا}}{۲} - \frac{\text{خ لا}}{۲}$$

ان مقادیر کو آئیلر کی قوت نما قیمتیں کہتے ہیں۔

۶۳۔ اس موقع پر یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ جمع اور تفریق کے ملتی ضابطے خیالی زاویوں کے لئے بھی درست ہوتے ہیں، یعنی یہ کہ لا خواہ حقیقی ہو یا ملف

جب (لا + ما) = جب لا جم ما + جم لا جب ما

جم (لا + ما) = جم لا جم ما - جب لا جب ما

جب (لا - ما) = جب لا جم ما - جم لا جب ما

اور جم (لا - ما) = جم لا جم ما + جب لا جب ما

$$\text{چونکہ جم لا} = \frac{\text{خ لا}}{۲} + \frac{\text{خ لا}}{۲} \text{ اور جب لا} = \frac{\text{خ لا}}{۲} - \frac{\text{خ لا}}{۲}$$





$$\text{تب جب (لا + ۲۲) = جب لا جم ۲۲ + جم لا جب ۲۲} \\ \text{= جب لا}$$

$$\text{اور جم (لا + ۲۲) = جم لا جم ۲۲ - جب لا جب ۲۲} \\ \text{= جم لا}$$

پس جب لا اور جم لا کی قیمتوں میں کوئی فرق نہیں آتا اگر لا میں ۲۲ کا اضافہ کر دیا جائے، اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر لا میں

$$۲۲، ۲۶، ۳۰، ۳۴، ۳۸، ۴۲$$

کا اضافہ کر دیا جائے تو بھی جب لا اور جم لا کی قیمتوں میں کوئی فرق نہیں آتا۔ لہذا اگر لا ملف ہو تو جب لا اور جم لا دوری تفاعل ہیں جھکا دور ۲۲ ہے۔

یہ نتیجہ ان نتائج کے عین موافق ہے جو حقیقی زوایا کے واسطے حصہ اول دفعہ ۶۷ میں معلوم کئے جا چکے ہیں۔

### ۱۰. مثلہ

$$\text{اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ جم لا = } \frac{\text{فو خلا} + \text{فو خلا}}{۲} \text{ اور جب لا = } \frac{\text{فو خلا} - \text{فو خلا}}{۲}$$

تو ثابت کرو کہ لا اور ما کی تمام (حقیقی یا ملف) قیمتوں کے واسطے

$$۱ = \text{جم لا} + \text{جب لا} = ۱ \quad ۲ = \text{جم لا} - \text{جب لا} = ۲$$

$$۳ = \text{جب لا} - \text{جم لا} = ۳ \quad ۴ = \text{جم لا} + \text{جب لا} = ۴$$

$$۵ = \text{جب لا} + \text{جم لا} = ۵ \quad ۶ = \text{جم لا} - \text{جب لا} = ۶$$

$$۷ = \text{جب لا} - \text{جم لا} = ۷ \quad ۸ = \text{جم لا} + \text{جب لا} = ۸$$

ثابت کرو کہ

$$۸- \{جیب (ع + ط) - نو \times عجب ط\} = جیب نو - نو \times ط$$

$$۹- جیب (ع + ن ط) - نو \times عجب ن ط = نو \times ط - جیب ع$$

$$۱۰- \{جیب (ع - ط) + نو \times عجب ط\} = جیب ا - جیب (ع - ن ط) + نو \times عجب ن ط$$

۶۶- دفعہ ۶۲ کے ضوابط میں اگر لا کوئی خالص خیالی مقدار ہو اور خ م کے مساوی ہو تو

$$\text{چونکہ } خ^2 = ۱ - نو \times خ م + نو \times خ م = \frac{نو \times خ م}{۲} + \frac{نو \times خ م}{۲} = \frac{نو + نو}{۲}$$

$$\text{اور جب } خ م = \frac{نو \times خ م}{۶۲} = \frac{نو - نو}{۶۲} = \frac{نو - نو}{(۱-۲)} = خ - نو = \frac{نو - نو}{۲}$$

۶۷- زائدی تغاعیل - تعریف - مقدار  
نو - نو

کو خواہ ما حقیقی ہو یا لطف ہمیشہ ما کی زائدی جیب کہتے ہیں اور کتابت میں اسے اختصاراً جبر ما سے تعبیر کرتے ہیں۔

اسی طرح سے مقدار  
نو + نو

کو ما کی زائدی جیب التمام کہتے ہیں اور کتابت میں اختصاراً جبر ما سے تعبیر کرتے ہیں۔

[بغور دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جبر ما اور جبر ما کی قیمتیں بالترتیب جب ما اور جبر ما کی قوت نما قیمتوں میں علامات خ کو حذف کر دینے سے حاصل ہوتی ہیں]

زائدی محاس، محاس التمام، قاطع، قاطع التمام کی قیمتیں زائدی جیب اور

جیب التمام سے اسی طرح سے معلوم کی جاتی ہیں جس طرح سے کہ معمولی حماس، حماس التمام، قاطع، قاطع التمام کی قیمتیں معمولی جیب اور جیب التمام سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{مثلاً مسزما} = \frac{\text{جمنرما}}{\text{جمنرما}} = \frac{\text{دوا} - \text{دوا}}{\text{دوا} + \text{دوا}}$$

$$\text{قنرما} = \frac{\text{جمنرما}}{\text{دوا}} = \frac{\text{دوا}}{\text{دوا}}$$

$$\text{قطنرما} = \frac{\text{جمنرما}}{\text{دوا}} = \frac{\text{دوا}}{\text{دوا}}$$

$$\text{منرما} = \frac{\text{جمنرما}}{\text{دوا}} = \frac{\text{دوا}}{\text{دوا}}$$

زائدی جیوب اور جیوب التمام کو ایک منحنی کے ساتھ جس کو قائم ہڈلولی یا قائم قطع زائد کہتے ہیں دہی تعلق ہے جو معمولی جیوب اور جیوب التمام کو دائرہ کے ساتھ ہے۔ اسی وجہ سے لفظ زائدی کا استعمال کیا گیا۔  
۶۸۔ دعات ۶۶، ۶۷ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{جم} (خ م) = \text{جمنرما}$$

$$\text{اور جب} (خ م) = \text{خ جمنرما}$$

$$\text{اسلے مس} (خ م) = \text{خ مسرما}$$

۶۹۔ علم مثلث کے اُن عام ترین ضوابط کے جواب میں جو زوایا کی نسبتوں سے متعلق ہیں ہڈلولی نسبتوں کے ضوابط کا بھی ایک نظام ہے مثلاً ہمیں معلوم ہے کہ زاویہ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم}^{\text{طہ}} + \text{جب}^{\text{طہ}} = ۱$$

$$\text{پس جم}^{\text{طہ}} (خ طہ) + \text{جب}^{\text{طہ}} (خ طہ) = ۱$$

لہذا دفعہ گذشتہ کی رو سے

$$\text{جمنرما}^{\text{طہ}} - \text{جمنرما}^{\text{طہ}} = ۱$$

[یہ نتیجہ زائدی تفاعیل کی تعریف سے بھی براہ راست حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \text{جنر } ۲ \text{ طہ} - \text{جنر } ۲ \text{ طہ} &= \left( \frac{۲ \text{ طہ} + ۲ \text{ طہ}}{۲} \right) - \left( \frac{۲ \text{ طہ} - ۲ \text{ طہ}}{۲} \right) \\ &= \frac{۲ \text{ طہ} + ۲ + ۲ \text{ طہ} - ۲}{۲} = ۱ \end{aligned}$$

نیز ہم جانتے ہیں کہ می اور و کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جب (می + و)} = \text{جب می جم} + \text{و جم می جب و}$$

می کی بجائے خ لا اور و کی بجائے خ ما رکھنے سے

$$\text{جب [خ (لا + ما)]} = \text{جب خ لا جم} + \text{ما جم خ لا جب خ ما}$$

تب دفعہ ماقبل کی رو سے

$$\text{خ جنر (لا + ما)} = \text{خ جنر لا جم} + \text{ما جنر لا} \times \text{خ جنر ما}$$

$$\therefore \text{خ جنر (لا + ما)} = \text{خ جنر لا جم} + \text{ما جنر لا جنر ما}$$

[براہ راست زائدی نسبتوں کی تعریف کی رو سے

$$\begin{aligned} &\text{جنر لا جم} + \text{ما جنر لا جنر ما} \\ &= \frac{۲ \text{ طہ} - ۲ \text{ طہ}}{۲} \times \frac{۲ \text{ طہ} + ۲ \text{ طہ}}{۲} + \frac{۲ \text{ طہ} + ۲ \text{ طہ}}{۲} \times \frac{۲ \text{ طہ} - ۲ \text{ طہ}}{۲} \\ &= \frac{۲ \text{ طہ} + ۲ - ۲ \text{ طہ} - ۲}{۲} = ۰ \end{aligned}$$

جو عمل ضرب سے = جنر (لا + ما) ]

نیز ہمیں معلوم ہے کہ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\frac{۳ \text{ مس طہ} - ۳ \text{ مس طہ}}{۳ - ۱} = ۳ \text{ مس طہ}$$

اس میں طہ کی بجائے خ لا رکھنے سے

$$\frac{۳ \text{ مس (خ لا)} - ۳ \text{ مس (خ لا)}}{۳ - ۱} = ۳ \text{ مس (خ لا)}$$

اس لئے دفعہ ۶۸ کی رو سے

$$\text{مسنر (۳) لا} = \frac{\text{مسنر لا} - \text{مسنر لا}}{\text{مسنر لا} - ۱}$$

$$\text{پس مسنر لا} = \frac{\text{مسنر لا} + \text{مسنر لا}}{۲}$$

حسب سابق اسکا ثبوت بھی مسنر لا کی تعریف سے باسانی اخذ کیا جاسکتا ہے۔

۷۰۔ عام طور پر دفعہ ۶۸ کی مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی عام ضابطہ میں جو زوایا کی جیوب اتمام کے لئے درست ہو 'جم' کی بجائے 'جمنز' پڑھیں تو بھی ضابطہ مذکور درست رہے گا۔

نیز چونکہ جب (مسنر لا) = جمنز ما اسلئے دفعہ مذکورہ بالا کی مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں کوئی ایسا ضابطہ معلوم ہو جس میں کسی زاویہ کی جیب کا مربع اور جیب اتمام دونوں شامل ہوں تو اس ضابطہ میں 'جم' کی بجائے 'جمنز' اور 'جب' کی بجائے 'جبنز' لکھنے سے جو ضابطہ حاصل ہوگا وہ بھی درست ہوگا۔

اسی طرح مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ ہم کسی ضابطہ کو جس میں 'مسنر' شامل ہو محض مسنر کی بجائے 'مسنر' لکھنے سے ایک متشابہ ضابطہ میں تحویل کر سکتے ہیں۔

اس طریقہ سے ہم دفعات ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۳۴، ۳۶ اور ۴۸-۵۳ سے اور نیز حصہ اول کی دفعات ۲۴۷ اور ۲۴۸ سے ایسے متشابہ سلسلے اور ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زائدی تقاعیل پر مشتمل ہوں

۷۱۔ (دفعہ ۵۶ کے سلسلہ کو مد نظر رکھتے ہوئے) دفعہ ۶۷ کی رو سے ظاہر ہے کہ

$$\text{جزر لا} = \frac{1}{4} (\text{و}^{\circ} + \text{و}^{-\circ})$$

$$= 1 + \frac{\text{لا}^{\circ}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}^{\circ}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}^{\circ}}{\text{لا}} + \dots$$

$$\text{اور جبر لا} = \frac{1}{4} (\text{و}^{\circ} - \text{و}^{-\circ})$$

$$= \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\circ}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}^{\circ}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}^{\circ}}{\text{لا}} + \dots$$

یہ جزر لا اور جبر لا کی تفصیلی قیمتیں کہلاتی ہیں۔

۷۲۔ زائدی تغاییل کے ادوار۔

ہم جانتے ہیں کہ طہ کی تمام حقیقی یا ملفت قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم خ طہ} = \text{جزر طہ}$$

$$\text{اس لئے جزر (لا + خ ما) = جم } \{ \text{لا + خ ما} \} = \text{جم (خ لا - ما)}$$

$$= \text{جم } [ - \text{لا} + \text{خ ما} ] \dots \dots \dots \text{دفعہ ۶۵}$$

$$= \text{جم } [ \text{خ ما} + \text{لا} + \text{خ ما} ] = \text{جزر } [ \text{خ ما} + \text{لا} + \text{خ ما} ]$$

$$= \text{اسی طرح سے جزر } [ \text{خ ما} + \text{لا} + \text{خ ما} ] = \dots \dots \dots$$

پس ثابت ہوا کہ زائدی جیب تمام ایک دوری تغافل ہے جس کا

دور خیالی ہے اور 'خ ما' کے مساوی ہے۔

نیز چونکہ جبر طہ = رخ جب خ طہ اسلئے

$$\text{جزر (لا + خ ما) = - رخ جب } \{ \text{لا + خ ما} \}$$

$$= - \text{رخ جب } \{ \text{خ لا - ما} \}$$

$$= - \text{رخ جب } [ - \text{لا} + \text{خ ما} ]$$

$$= - \text{رخ جب } \{ \text{خ ما} + \text{لا} + \text{خ ما} \}$$

$$= \text{جبر} [۲۲خ + لا + خ۱]$$

پس جبر (لا + خ۱) کا دور ۲۲خ ہے۔

اسی طرح سے بتایا جاسکتا ہے کہ مسر (لا + خ۱) کا دور ۲۲خ ہوتا ہے زائدی تفاعلوں کا دور حقیقی نہیں ہوتا بلکہ خیالی ہوتا ہے، اس لحاظ سے زائدی تفاعیل، مستدیر تفاعیل سے اختلاف رکھتے ہیں۔

۳۔ مشق ۱۔ جب (عہ + خ بہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{جب (عہ + خ بہ)} = \text{جب عہ جم خ بہ} + \text{جم عہ جب خ بہ}$$

$$= \text{جب عہ} \frac{\text{قوت} + \text{قوت}^-}{۲} + \text{جم عہ} \frac{\text{قوت}^- - \text{قوت}^-}{۲}$$

$$= \text{جب عہ} \frac{\text{قوت} + \text{قوت}^-}{۲} + \text{خ جم عہ} \frac{\text{قوت}^- - \text{قوت}^-}{۲}$$

$$= \text{جب عہ جبر بہ} + \text{خ جم عہ جبر بہ}$$

مشق ۲۔ مس (عہ + خ بہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{مس (عہ + خ بہ)} = \frac{\text{جب (عہ + خ بہ)}}{\text{جم (عہ + خ بہ)}}$$

$$= \frac{۲ \text{ جب (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)}}{۲ \text{ جم (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)}} = \frac{\text{جب ۲ عہ} + \text{جب ۲ خ بہ}}{\text{جم ۱ عہ} + \text{جم ۲ خ بہ}}$$

$$= \frac{\text{جب ۲ عہ} + \text{خ جبر ۲ بہ}}{\text{جم ۲ عہ} + \text{جبر ۲ بہ}} \dots \dots \dots (\text{دفعہ ۶۸})$$

متبادل ثبوت

فرض کرو کہ مس (عہ + خ بہ) = لا + خ۱

پس مس (ع - خ بہ) = لا - خ ما

∴ لا =  $\frac{1}{2}$  [مس (ع + خ بہ) + مس (ع - خ بہ)]

=  $\frac{\text{جب (ع + خ بہ) جم (ع - خ بہ) + جم (ع + خ بہ) جب (ع - خ بہ)}}{2}$

۲ جم (ع + خ بہ) جم (ع - خ بہ)

=  $\frac{\text{جب ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ}} = \frac{\text{جب ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ}}$

نیز ما =  $\frac{1}{2}$  {مس (ع + خ بہ) - مس (ع - خ بہ)}

=  $\frac{\text{جب (ع + خ بہ) جم (ع - خ بہ) - جم (ع + خ بہ) جب (ع - خ بہ)}}{2} \times \frac{1}{\text{جم ۲ ع}}$

=  $\frac{1}{2} \times \frac{\text{جب ۲ خ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ}} = \frac{\text{جب ۲ خ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ}}$

∴ مس (ع + خ بہ) =  $\frac{\text{جب ۲ ع + خ جب ۲ بہ}}{\text{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ}}$

مشق ۳ - جمز (ع + خ بہ) کے حقیقی اور غیر حقیقی حصے الگ الگ کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ جمز (ع + خ بہ) =  $\frac{\text{و ع + خ بہ}}{2} + \frac{\text{و ع - خ بہ}}{2} \dots$  دفعہ ۶۰

=  $\frac{\text{و ع} \times \text{و خ بہ} + \text{و ع} \times \text{و خ بہ}}{2}$

=  $\frac{\text{و ع (جم بہ + خ جب بہ) + و ع (جم بہ - خ جب بہ)}}{2} \dots$  دفعہ ۶۲

=  $\frac{\text{جم بہ (و ع + و ع) + خ جب بہ (و ع - و ع)}}{2}$



$$= \text{جم بہ جمرعہ} + \text{خ جب بہ جمرعہ}$$

متبادل ثبوت

$$\begin{aligned} \text{جمز (عہ + خ بہ)} &= \text{جم} \{ \text{عہ + خ بہ} \} \dots \dots \dots \text{دفعہ ۶۸} \\ &= \text{جم} \{ \text{خ عہ - بہ} \} = \text{جم (خ عہ)} + \text{جم بہ + جب (خ عہ) جب} \\ &= \text{جمز عہ جم بہ} + \text{خ جمرعہ جب بہ} \end{aligned}$$

## ۱۱ مثلہ

ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} ۱- \text{جمز ۲ لا} &= ۲ + ۱ = ۲ \text{ (جمز لا)} - ۱ \\ ۲- \text{جمز (عہ + بہ)} &= \text{جمز عہ جمز بہ} + \text{جمز عہ جمرعہ} \\ ۳- \text{جمز (عہ + بہ) - جمز (عہ - بہ)} &= ۲ \text{ جمز عہ جمرعہ} \end{aligned}$$

$$۴- \text{مسر (عہ + بہ)} = \frac{\text{مسر عہ} + \text{مسر بہ}}{۱ + \text{مسر عہ مسر بہ}}$$

$$۵- \text{جمز ۳ لا} = ۴ \text{ جمز لا} - ۳ \text{ جمز لا}$$

$$۶- \text{جمز ۳ لا} = \text{جمز لا} + ۴ \text{ جمز لا}$$

$$۷- \text{جمز (لا + ۵)} = \frac{۱}{۴} \text{ (جمز لا - ۵)} + \text{جمز ۲ لا} + \text{جمز ۲ لا}$$

$$۸- \text{جمز لا} + \text{جمز ۵ لا} + \text{جمز ۸ لا} + \text{جمز ۱۱ لا} = ۴ \text{ جمز ۳ لا} + \text{جمز ۳ لا} + \text{جمز ۳ لا}$$

$$۹- \text{جمز لا} + \text{جمز (لا + ۵)} + \text{جمز (لا + ۲)} + \text{جمز (لا + ۳)} \dots \dots \dots \text{ن رقموں تک}$$

$$= \frac{\text{جمز (لا + ۵)} + \text{جمز (لا + ۲)} + \text{جمز (لا + ۳)} \dots \dots \dots \text{ن رقموں تک}}{\frac{۵}{۲}}$$

$$۱۰- \text{جمز لا} + \text{جمز (لا + ۵)} + \text{جمز (لا + ۲)} + \text{جمز (لا + ۳)} \dots \dots \dots \text{ن رقموں تک}$$

$$= \frac{\text{جینر } (لا + \frac{۱-ن}{۲}) \text{ جینر } \frac{۱-ن}{۲}}{\text{جینر } \frac{۱-ن}{۲}}$$

$$۱۱- \text{جینر } لا + ن \text{ جینر } لا + \frac{ن(۱-ن)}{۲} \text{ جینر } لا + ..... (ن+۱) \text{ رقوم تک}$$

$$= ۲ \text{ جینر } \frac{لا}{۲} \text{ جینر } (۱ + \frac{ن}{۲}) \text{ لا}$$

$$۱۲- \text{جینر بہ جب عہ} + خ \text{ جینر بہ جم عہ} = خ \text{ جم} (عہ + خ بہ)$$

$$۱۳- \text{جب } ۲ \text{ عہ} + خ \text{ جینر } ۲ بہ = ۲ \text{ جب} (عہ + خ بہ) \text{ جم} (عہ - خ بہ)$$

$$۱۴- \text{جم} (عہ + خ بہ) + خ \text{ جب} (عہ + خ بہ) = قوت (جم عہ + خ جب عہ)$$

$$۱۵- \text{اگر مس ما} = \text{مس نہ سنر بہ اور مس می} = \text{مم عہ سنر بہ تو}$$

$$\text{ثابت کرو کہ مس} (ما + می) = \text{جینر } ۲ بہ قم ۲ عہ$$

$$۱۶- \text{اگر می} = \text{لوک مس} (\frac{۲۱}{۲} + \frac{۲۲}{۲}) \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{سنر می} = \text{مس } \frac{۲۱}{۲}$$

ذیل کی مقادیر کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو۔

$$۱۷- \text{جم} (عہ + خ بہ) \quad ۱۸- \text{مم} (عہ + خ بہ)$$

$$۱۹- \text{قم} (عہ + خ بہ) \quad ۲۰- \text{قطا} (عہ + خ بہ)$$

$$۲۱- \text{جینر } (عہ + خ بہ) \quad ۲۲- \text{سنر} (عہ + خ بہ)$$

$$۲۳- \text{قطر} (عہ + خ بہ)$$

$$۲۴- \text{ثابت کرو کہ مس} \frac{می + خ د}{۲} = \frac{\text{جب می} + خ جینر د}{\text{جم می} + جینر د}$$

$$۲۵- \text{اگر جب} (لا + خ بہ) = لا + خ ما \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$۱ = \frac{لا}{\text{جینر } ۲ بہ} + \frac{ما}{\text{جینر } ۲ بہ}$$

$$\text{اعد} = \frac{\text{لا}^2}{\text{جب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{جم}^2} = ۱$$

۲۶۔ اگر مس (۱ + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲ \text{ لا حم} ۲ = ۱$$

$$\text{اور لا}^2 + \text{ما}^2 - ۲ \text{ ما مز} ۲ ب = ۱$$

۲۷۔ اگر جب (طہ + خ ذہ) = جم عہ + خ جب عہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^2 طہ = \pm \text{جب عہ}$$

۲۸۔ اگر جب (طہ + خ ذہ) = مس (جم عہ + خ جب عہ) تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس} = \frac{۱}{۲} [\text{جمز} ۲ ذہ - \text{جم} ۲ طہ] \text{ اور مس عہ} = \text{مسز} ۲ مم طہ$$

۲۹۔ اگر جم (طہ + خ ذہ) = ل (جم عہ + خ جب عہ) تو ثابت کرو کہ

$$\text{ذہ} = \frac{۱}{۲} \frac{\text{جب (طہ - عہ)}}{\text{جب (طہ + عہ)}}$$

۳۰۔ اگر مس (طہ + خ ذہ) = مس عہ + خ قط عہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{قو}^2 = \pm \text{مم عہ} \text{ اور } ۲ طہ = ن \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} + عہ$$

۳۱۔ اگر مس (طہ + خ ذہ) = جم عہ + خ جب عہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = \frac{ن}{۲} + \frac{۲}{۲} \text{ اور ذہ} = \frac{۱}{۲} \text{ لوک مس} \left( \frac{ن}{۲} + \frac{۲}{۲} + عہ \right)$$

۳۲۔ اگر ۱ + خ ب = ج مس (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس} ۲ لا = \frac{\text{ج} ۲}{\text{ج} - ۱ - \text{ب}}$$

۳۳۔ اگر مس (طہ + خ ذہ) = جب (لا + خ ما)

$$\text{تو ممز} ۲ ما \text{ جمز} ۲ ذہ = \text{مم لا جب} ۲ طہ$$

۳۴۔ اگر  $س (عہ + خ بہ) = خ$

جہاں  $عہ$  اور  $بہ$  دونوں حقیقی ہیں تو ثابت کر دو کہ  $عہ$  غیر مقین ہے اور بہ لامتناہی ہے۔

ثابت کر دو کہ

۳۵۔  $\frac{1}{4} \{ جبز لا + جب لا \} = لا + \frac{لا^2}{5} + \frac{لا^3}{9} + \dots$  تا لامتناہی

۳۶۔  $\frac{1}{4} \{ جمل لا + جم لا \} = ۱ + \frac{لا^2}{4} + \frac{لا^3}{8} + \dots$  تا لامتناہی

۳۷۔ مقلوب و مستدیر تفاعل۔ اگر  $عہ$  اور  $بہ$  دونوں حقیقی

ہوں اور  $عہ = جم بہ$  تو دفعہ ۳۴ میں بتایا جا چکا ہے

کہ  $عہ$  کی مقلوب جیب التمام سے مراد  $بہ$  کی وہ قیمت ہے جو ۱۰ اور ۲ کے درمیان واقع ہے اور یہ بھی اشارۃً مذکور ہو چکا ہے کہ بہ ایک کثیرالقیمت مقدار ہوتی ہے۔

اگر اب  $لا + خ = جم (ی + خ و)$

تو اسی طرح سے ہم  $ی + خ و$  کو  $لا + خ$  کی مقلوب جیب التمام کہیں گے۔ لیکن چونکہ

$لا + خ = جم (ی + خ و) = جم [۲ن ± (ی + خ و)] \dots$  (دفعہ ۶۵)

اس لئے ظاہر ہے کہ

$۲ن ± (ی + خ و)$

بھی  $لا + خ$  کی مقلوب جیب التمام ہے جہاں  $ن$  سے ملو کوئی صحیح عدد

پس  $لا + خ$  کی مقلوب جیب التمام ایک کثیرالقیمت تفاعل ہے۔

اگر مقلوب جیب التمام کی قیمتوں کی کثرت کو بھی ملحوظ رکھنا مقصود ہو

اس کو جم' (لا + خ + ما) کی بجائے جم' (لا + خ + ما) کہتے ہیں، اسی طرح سے دیگر مثلثی نسبتوں کی رموز کا خط نسخ میں لکھا جاتا بھی انہی معنوں پر دلالت کرتا ہے نیز لا + خ + ما کی مقلوب جیب اتمام کی خاص قیمت سے  $۲ن \pm (ی + خ + و)$  کی ایسی قیمت مراد ہے جس سے کہ  $۲ن + ی$  یا  $۲ن - ی$  کی قیمت صفر اور  $۲$  کے درمیان واقع ہو۔

اس قیمت خاص کو جم' (لا + خ + ما) سے تعبیر کرتے ہیں۔  
تب ظاہر ہے کہ

$$\text{جم' (لا + خ + ما)} = ۲ن \pm \text{جم' (لا + خ + ما)}$$

۵۔ اسی طرح سے اگر

لا + خ + ما = جب (ی + خ + و) جب  $۲ن + (۱ - ی + خ + و)$  تو  $۲ن + (۱ - ی + خ + و)$  کو لا + خ + ما کی مقلوب جیب کہتے ہیں یہ بھی ایک کثیر قیمت مقدار ہے اور جب' (لا + خ + ما) سے تعبیر کی جاتی ہے۔ نیز اس کی قیمت خاص سے وہ قیمت مراد ہے جس سے اس کا حقیقی حصہ -  $\frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۱}{۲}$  کے درمیان واقع ہوتا ہے، اس خاص قیمت کو جب' (لا + خ + ما) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔  
اس سے ظاہر ہے کہ

$$\text{جب' (لا + خ + ما)} = ۲ن + (۱ - ی + خ + و)$$

اسی طرح مس' (لا + خ + ما) اور مس' (لا + خ + ما) کی تعریفات بھی حسبہ کی جا سکتی ہیں یعنی مس' (لا + خ + ما) کی قیمت خاص سے وہ قیمت مراد ہے جس سے اس کا حقیقی حصہ -  $\frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۱}{۲}$  کے

درمیان واقع ہوتا ہے۔ تب ظاہر ہے کہ

$$\text{مس}^{-1} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) = \text{ن} + \text{مس}^{-1} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

اسی طرح سے

$$\text{قط}^{-1} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) = \text{ن} + \text{قط}^{-1} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

$$\text{قم}^{-1} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) = \text{ن} + \text{قم}^{-1} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

$$\text{اورم}^{-1} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) = \text{ن} + \text{اورم}^{-1} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

۷۶۔ آئندہ ہم جسم اجب، جسم اور جب کو اپنی معنوں میں استعمال کریں گے جو اوپر تجویز کئے گئے ہیں۔

۷۷۔ مطلوب زائدی تفاعل

$$\text{اگر لا} = \text{جز ما تو بموجب قدم ۷۷ ما} = \text{جز لا}$$

$$\text{اگر لا حقیقی ہو تو لا} = \frac{\text{ما} + \text{قو}^{-1}}{\text{قو}^{-1}}$$

$$\text{یعنی قو}^{-1} = \text{لا} + \text{قو}^{-1} + ۱ = ۰$$

$$\text{اس لئے قو}^{-1} = \text{لا} + \text{لا}^{-1} + ۱$$

$$\text{ما} = \text{لا} + \text{لا}^{-1} + ۱ \text{ یا } \frac{۱}{\text{لا} + \text{لا}^{-1} + ۱}$$

$$\text{ما} = \pm \text{لوک} (\text{لا} + \text{لا}^{-1} + ۱)$$

بائیں جانب کے رکن کی علامت ہمیشہ مثبت لی جاتی ہے۔

پس ثابت ہوا کہ جب لا حقیقی ہو تو جز لا ایک قیمت والا تفاعل ہے۔  
جز لا اور مس لا کی تعریفات بھی بدستور کی جاسکتی ہیں اور اگر لا حقیقی

زائدیہ ایک قیمت والے تفاعل ہیں۔

۸۔ اگر  $ع + خ ب = جنز (لا + خ ما)$  تو  $لا + خ ما کو ع + خ ب کی$   
مقلوب زائدی جیب التام کہتے ہیں۔

لیکن  $جنز (لا + خ ما) = جنز (لا + خ ما) \pm ۲۲$  ... بموجب دفعہ ۷۲  
اس لئے  $۲۲$   $خ$   $\pm$   $(لا + خ ما)$  مقدار  $ع + خ ب$  کی مقلوب زائدی  
جیب التام ہے اور اسکی خاص قیمت سے مراد اس کی وہ قیمت ہے  
جس سے اس کا خیالی حصہ ۰ اور  $۲۲$  کے درمیان واقع ہو یعنی وہ قیمت  
جس سے  $۲۲$   $خ$   $\pm$   $ما$  کے درمیان واقع ہو۔

اسی طرح سے  $ع + خ ب$  کے مقلوب زائدی جیب و محاس کی بھی تعریض  
کی جاسکتی ہیں۔ ان صورتوں میں ان کی خاص قیمتیں وہ ہونگی جن میں  
خیالی حصہ  $\frac{۲۲}{۲}$   $خ$  اور  $\frac{۲۲}{۲}$   $خ$  کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۷۹۔ مشق ۱۔ جب  $(اجم طہ + خ جب طہ)$  کے خیالی اور حقیقی  
حصے الگ الگ کرو چاہا طہ حقیقی ہے۔

فرض کرو کہ جب  $(اجم طہ + خ جب طہ) = لا + خ ما$   
یعنی  $جم طہ + خ جب طہ = جب (لا + خ ما)$

$= جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما = جب لا جنز ما + خ جم لا جنز ما$

اس لئے جب لا جنز ما = جم طہ ..... (۱)

اور جم لا جنز ما = جب طہ ..... (۲)

مرتب لینے اور جمع کرنے سے

$= جب لا جنز ما + جم لا جنز ما = جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما = جب لا جنز ما$

$لا جنز ما = جم لا$

اس نے اگر جب طہ کو مشیت فرض کیا جائے تو

مساوات (۲) سے ہم لا = جب طہ

اور چونکہ لا =  $(\frac{11}{2})$  اور  $(\frac{11}{2}) + 1$  کے درمیان واقع ہونا چاہئے ..... دفعہ ۱۱

اس لئے جم لا = +  $\overline{\text{اجب طہ}}$  یعنی لا = جم (اجب طہ)

تب مساوات (۲) سے

جمز ما = +  $\overline{\text{اجب طہ}}$

اس لئے تو ۲ -  $\overline{\text{اجب طہ}}$  =  $\overline{\text{اجب طہ}}$  جو تو کے لحاظ سے درجہ دوم کی مساوات ہے

لہذا تو =  $\overline{\text{اجب طہ}}$  +  $\overline{\text{اجب طہ}}$

یعنی ما = لوک {  $\overline{\text{اجب طہ}}$  +  $\overline{\text{اجب طہ}}$  }

مشق ۲ - مسن {  $\overline{\text{عہ}}$  +  $\overline{\text{خ بہ}}$  } کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو۔

فرض کرو کہ مسن {  $\overline{\text{عہ}}$  +  $\overline{\text{خ بہ}}$  } = (لا -  $\overline{\text{خ ما}}$ )

یعنی مس (لا -  $\overline{\text{خ ما}}$ ) =  $\overline{\text{عہ}}$  +  $\overline{\text{خ بہ}}$

اور مس (لا -  $\overline{\text{خ ما}}$ ) =  $\overline{\text{عہ}}$  -  $\overline{\text{خ بہ}}$

∴ مس ۲ لا = مس { (لا -  $\overline{\text{خ ما}}$ ) + (لا -  $\overline{\text{خ ما}}$ ) }

$$\frac{2 \text{ لا}}{1 - \overline{\text{عہ}} - \overline{\text{خ ما}}} = \frac{(\overline{\text{عہ}} + \overline{\text{خ بہ}}) + (\overline{\text{عہ}} - \overline{\text{خ بہ}})}{1 - (\overline{\text{عہ}} + \overline{\text{خ بہ}}) - (\overline{\text{عہ}} - \overline{\text{خ بہ}})}$$

∴ لا =  $\frac{1}{4}$  مسن {  $\overline{\text{عہ}}$  -  $\overline{\text{خ ما}}$  }

نیز مس (۲  $\overline{\text{خ ما}}$ ) = مس { (لا -  $\overline{\text{خ ما}}$ ) - (لا -  $\overline{\text{خ ما}}$ ) }

$$\frac{2 \overline{\text{خ بہ}}}{1 + \overline{\text{عہ}} + \overline{\text{خ ما}}} = \frac{(\overline{\text{عہ}} + \overline{\text{خ بہ}}) - (\overline{\text{عہ}} - \overline{\text{خ بہ}})}{1 + (\overline{\text{عہ}} + \overline{\text{خ بہ}}) + (\overline{\text{عہ}} - \overline{\text{خ بہ}})}$$



$$(۱) \dots\dots\dots \frac{x^2}{y^2 + z^2 + 1} = \frac{y^2 - z^2}{y^2 + z^2 + 1}$$

$$\frac{y^2 + z^2 + 1}{y^2 - z^2 + 1} = \frac{y^2}{y^2 - z^2}$$

$$\frac{y^2 + (z+1)^2}{y^2 + (z-1)^2} =$$

$$\left\{ \frac{y^2 + (z+1)^2}{y^2 + (z-1)^2} \right\} \frac{1}{2} \text{ لوگ}$$

$$\frac{x^2}{y^2 + z^2 + 1} = \text{مسز } ۲ \text{ ما} =$$

$$\frac{x^2}{y^2 + z^2 + 1} \text{ مسز } ۱ \text{ ما} = \frac{1}{2} \text{ مسز } ۱$$

$$\text{پس مسز } ۱ (ع + خ + ی) = \text{ن } ۱۱ + \text{مسز } ۱ (ع + خ + ی)$$

$$= \text{ن } ۱۱ + \frac{1}{2} \text{ مسز } ۱ (ع + خ + ی) + \frac{x^2}{y^2 + z^2 + 1} \text{ مسز } ۱$$

### ۱۲ مسئلہ

ذیل کی متادیر کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو

$$۱- \text{مسز } ۱ \left\{ \text{جم طه} + \text{خر جب طه} \right\}$$

$$۲- \text{جم } ۱ \left\{ \text{جم طه} + \text{خر جب طه} \right\} \dots \text{چھ طه کوئی مثبت حوالہ زاویہ}$$

ثابت کرو کہ

$$۳- \text{جبز } ۱ \text{ لوگ} \left\{ ۱ + \sqrt{۱ + ۱} \right\} = \text{مسز } ۱ \text{ لا} = \text{جبز } ۱ \frac{۱}{\sqrt{۱ + ۱}}$$

$$۵- \text{جبز } ۱ \text{ لا} = \text{لوگ} \left\{ ۱ + \sqrt{۱ + ۱} \right\}$$

$$۶- \text{مسز } ۱ \text{ لا} = \frac{1}{2} \text{ لوگ} \frac{۱ + ۱}{۱ - ۱}$$

$$۷۔ جب تار قم طہ = \{ ۲۱ + (-۱) \} \frac{۲}{۲} + (-۱) \frac{۱}{۲} \text{ لوک مم طہ}$$

$$۸۔ مس ۱ (خ طہ) = \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۲} \frac{۱}{۲} \text{ لوک مس} \left( \frac{۲}{۲} - \frac{۲}{۲} \right)$$

$$۹۔ مس ۱ - \frac{\text{مس ۲ طہ} + \text{سنز ۲ ذہ}}{\text{مس ۲ طہ} - \text{سنز ۲ ذہ}} + \frac{\text{مس ۱ طہ} - \text{سنز ۱ ذہ}}{\text{مس ۱ طہ} + \text{سنز ۱ ذہ}}$$

$$= \text{مس ۱ (مم طہ منز ذہ)}$$

ذیل کی مفادیر کی ترسیمیں بناؤ جہاں لا سے مراد کوئی حقیقی مقدار ہے۔

۱۰۔ جمنز لا اور قمنز لا

۱۱۔ جمنز لا اور قطنز لا

۱۲۔ سنز لا اور منز لا

# باششم

## ملف مقادیر کے لوکارتم

۸۰۔ اگر  $e = \text{فول}$  اور  $e$  اور  $la$  دونوں حقیقی ہوں تو ہمیں معلوم ہے کہ  $la$  کو  $e$  کا لوکارتم اساس فو پر کہتے ہیں۔

نیز ہم دفعہ ۵ میں بتا چکے ہیں کہ

$$e = \text{فول} = 1 + la + \frac{la^2}{2!} + \frac{la^3}{3!} + \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$$

اس لئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ اساس فو پر  $e$  کا لوکارتم  $la$  فیل کی مساوات

$$e = 1 + la + \frac{la^2}{2!} + \frac{la^3}{3!} + \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی} \quad (۱)$$

کی ایک اصل ہے

اب ہم مندرجہ بالا نتیجہ کو وسعت دیکر یہ معلوم کریں گے کہ ملف مقادیر کی صورت میں یہ مسئلہ کیا شکل اختیار کرتا ہے۔

۸۱۔ تعریف۔ اگر  $la + x$  کوئی ملف مقدار ہو اور  $e + x$  بہ

ایک اور ملف مقدار ایسی ہو جو  $la + x$  کے یعنی سلسلہ

$$1 + (la + x) + \frac{(la + x)^2}{2!} + \frac{(la + x)^3}{3!} + \dots \dots \dots$$

کے مساوی ہو تو  $la + x$  کو مقدار  $e + x$  بہ کا ایک لوکارتم کہتے ہیں

لفظ 'ایک' کے استعمال کرنے کی وجہ یہ ہے کہ درحقیقت مندرجہ بالا تعریف کے ماتحت کسی مقدار کے اور بھی بہت سے لوکار تم ہوتے ہیں۔ اس امر کی تشریح ذیل میں کی جاتی ہے

$$\text{عہ} + \text{خر بہ} = \text{وہ} + \text{خا} \dots\dots\dots (۱)$$

نیز ہمیں معلوم ہے کہ دفعہ ۶۲ کے مطابق ن کی ایسی تمام قیمتوں کے لئے جو صحیح اعداد ہوں

$$\text{وہ} + \text{خا} = \text{جم} + \text{ن} + \text{خ} + \text{جب} + \text{ن} = ۲۱ \dots\dots\dots (۲)$$

اسلئے مساوات (۱) اور (۲) سے اڑوے دفعہ ۵۹

$$\text{عہ} + \text{خر بہ} = \text{وہ} + \text{خا} + \text{وہ} + \text{ن} + \text{خ} = \text{وہ} + (\text{ن} + \text{خ} + ۱) + \text{خ}$$

پس متذکرہ بالا تعریف کے ماتحت یہ ظاہر ہے کہ اگر عہ + خر بہ کا لوکار تم لا + خر ما ہو تو

$$\text{لا} + \text{خر ما} + \text{ن} + \text{خ}$$

$$\text{یعنی } (\text{لا} + \text{خر} + \text{ما} + \text{ن} + \text{خ})$$

بھی اس کا ایک لوکار تم ہوگا۔

۸۲۔ اب ہم ملفوظ مقدار عہ + خر بہ کے لوکار تم معلوم کرتے ہیں جہاں عہ اور بہ دونوں حقیقی ہیں۔

دفعہ ۲۰ کی رو سے

$$\text{عہ} + \text{خر بہ} = \text{جم} + \text{ن} + \text{خ} + (\text{طہ} + \text{ن} + \text{خ}) + \text{طہ}$$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

$$۱ = \text{عہ} + \text{طہ} + \text{ن}$$

اور طہ سے مراد '۲' اور '۲' کے درمیان ایسا زاویہ ہے کہ  $\text{جم طہ} = \text{عجی}$

اور جب طہ =  $\frac{1}{2}$

یعنی دفعہ ۲۰ کی قیود کے ماتحت

طہ = مس -  $\frac{1}{2}$

پس اگر لا + خ ما ایک لوکارتم ہو عہ + خ بہ کا

تو ر [جم (۲ ن ۲ + طہ) + خ جب (۲ ن ۲ + طہ)] =  $\text{ولا} + \text{خ ما}$

=  $\text{ولا} \times \text{ولا} \times \text{ولا} \dots \dots \dots$  (دفعہ ۵۹)

=  $\text{ولا} (\text{جم} + \text{خ جب} + \text{ما})$

حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$\text{ولا} \text{جم} + \text{ما} = \text{رجم} \{ ۲ ن ۲ + طہ \}$

اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$\text{ولا} \text{جب} + \text{ما} = \text{رجب} \{ ۲ ن ۲ + طہ \}$

اس لئے  $\text{ولا} = \text{ر اور} \text{ما} = ۲ ن ۲ + طہ$

چونکہ لا اور ر دونوں حقیقی ہیں اسلئے لا اور کا معمولی پیر یہ نیپیری لوکارتم ہے

یعنی لا = لوک

اسلئے عہ + خ بہ کا ایک لوکارتم

لوک + خ (۲ ن ۲ + طہ)

یعنی لوک  $\text{ولا} + \text{عہ} + \text{خ بہ} + \text{خ} (۲ ن ۲ + طہ) + \text{مس} - \frac{1}{2}$  ہے۔

چونکہ ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہو سکتی ہے اس لئے فوراً یہ نتیجہ

نکلتا ہے کہ عہ + خ بہ کے لوکارتم تعداد میں لا انتہا ہوتے ہیں اور انکا

فرق ۲۲ خ کا ضعف ہوتا ہے۔

۸۳۔ دفعہ ماقبل کی رو سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ لوکارتم کی اُس وسیع تعریف کے ماتحت جو دفعہ ۸۱ میں بیان کی گئی ہے کسی عدد کا لوکارتم ایک کثیر القیمت تفاعل ہوتا ہے یا صاف الفاظ میں ایک عدد کے لائنہا لوکارتم ہوتے ہیں۔

جب قیمتوں کی اس کثرت کو بھی ملحوظ رکھنا مقصود ہو تو عد + خر بہ کے لوکارتم کو لوک (عد + خر بہ) لکھا جاتا ہے۔

اسلئے لوک (عد + خر بہ) = لوک (۲۱ + عد + ۲ + خر بہ) (۲۱ + خر بہ) اگر ہم لوک (عد + خر بہ) کی مندرجہ بالا قیمت میں ۲۱ کو صفر کے برابر فرض کریں تو جملہ محصلہ کو لوک (عد + خر بہ) کی خاص قیمت کہتے ہیں اور لوک (عد + خر بہ) سے تعبیر کرتے ہیں پس

لوک (عد + خر بہ) = لوک (۲۱ + عد + ۲ + خر بہ) + خر مس - ۱۱۱ اور  
لوک (عد + خر بہ) = ۲۱ + خر + ۲۱ + لوک (عد + خر بہ)

علامات لوک اور لوک کو آئندہ اختلاف معنی کے مندرجہ بالا مفہوم کے لحاظ سے استعمال کیا جائیگا۔

۸۴۔ ایک مثبت مقدار کا حقیقی لوکارتم صرف ایک ہوتا ہے لیکن اس کے خیالی لوکارتموں کی تعداد لامتناہی ہوتی ہے۔  
گذشتہ دفعہ کے نتیجہ میں یہ کو صفر کے برابر رکھنے سے

$$\text{لوک عد} = ۲۱ + خر + ۲۱ + \text{لوک عد}$$

اس سے صاف ظاہر ہے کہ لوکارتم کی وسیع تعریف کے ماتحت ہر ایک حقیقی مقدار کا حقیقی لوکارتم صرف ایک ہوتا ہے اور یہ معمولاً لوک عد سے تعبیر کیا جاتا ہے لیکن غیر حقیقی لوکارتم تعداد میں لامتناہی ہوتے ہیں اور

مؤخر الذکر لوکارتم، اس حقیقی لوکارتم میں  $۲ \times ۲۲$  کا کوئی ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ نتیجہ دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) سے بھی براہ راست حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ دفعہ مذکورہ کی مساوات لامتناہی درجہ کی مساوات ہے اسلئے اسکی اصولوں کی تعداد بھی لامتناہی ہے جن میں سے حقیقی صرف ایک ہی ہے۔

یہ امر قابل توجہ ہے کہ لوکارتم کی وسیع تعریف کے بموجب کسی حقیقی عدد کا جو لوکارتم ہوتا ہے اس کی قیمت خاص، اس عدد کے معمولی جبریرہ لوکارتم کے مساوی ہوتی ہے۔

۸۵۔ کسی منفی مقدار کا لوکارتم۔ دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں رکھو  
یہ = ۰ اور = - لا جہاں لا ایک حقیقی مثبت مقدار ہے

$$\therefore + م + ع + پ = لا$$

اور سن  $\frac{۱}{۲}$  [جو ایسا زاویہ ہے کہ اسکی جیب انعام  $\frac{۱}{۲}$  یعنی ۱۔

ہے اور اس کی جیب صفر ہے بموجب دفعہ ۲۰] = ۲

$$۵. لوک (- لا) = ۲ ن خ ۲ + لوک لا + خ ۲$$

$$اور لوک (- لا) = لوک لا + خ ۲$$

لہذا لوکارتم کی وسیع تعریف کے بموجب کسی منفی مقدار (- لا) کا جو لوکارتم ہوگا اسکی قیمت خاص، لا کے معمولی جبریرہ لوکارتم اور خ ۲ کے مجموعہ کے مساوی ہوگی۔

۸۶۔ ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو بالتمام خیالی ہو۔ دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں ع کو صفر کے مساوی رکھنے سے

$$\text{لوک (خر ب)} = ۲ن خر + ۲ لوک رو ب + خر \frac{۲}{۳}$$

$$= \text{لوک رو ب} + خر (۲ن + \frac{۱}{۳})$$

اس سے ثابت ہوا کہ ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو بالتمام خیالی ہو  
دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے جن میں سے پہلا حصہ حقیقی ہوتا ہے اور دوسرا خیالی  
اور کثیر القیمت -

بطور صورت خاص کے یہ = ۱ فرض کرو، تب

$$\text{لوک (۱-۲)} = خر (۲ن + \frac{۱}{۳})$$

یعنی لوک (۱-۲) کی قیمت خاص  $\frac{۲}{۳} خر$  ہوتی ہے -

۸۷ - دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں

$$ع = \text{جم طہ}$$

$$\text{اور ب} = \text{جب طہ رکھو تب}$$

$$\text{لوک (جم طہ + خر جب طہ)}$$

$$= \text{لوک رو ب} + خر (۲ن + ۲ طہ) = خر طہ + ۲ن خر + ۲$$

$$\text{اسلئے لوک رو خ طہ} = خر طہ + ۲ن خر + ۲$$

لہذا لوک رو خ طہ کی قیمت خاص سے یعنی لوک رو خ طہ سے (طہ + ۲ن) خر  
کی وہ قیمت مراد ہوتی ہے جس سے طہ + ۲ن - ۲ اور ۲ کے  
درمیان واقع ہو -

۸۸ - مشق ۱ - ذیل کی رقم کو اس کے حقیقی اور خیالی حصوں میں تحلیل کرو -

$$\text{لوک جب (لا + خر ما)}$$

$$\text{فرض کرو کہ لوک جب (لا + خر ما) = ی + خ د}$$

$$\text{جس سے ی + خ د = جب (لا + خر ما)}$$



$$= \text{جب لا جم خما} + \text{جم لا جب خما}$$

$$= \text{جب لا} \frac{\text{وا} + \text{وا} - \text{وا}}{۲} + \text{خ جم لا} \frac{\text{وا} - \text{وا} - \text{وا}}{۲} \dots (۱)$$

بوجوب دفعہ ۱۸ فرض کرو کہ مساوات بالا کی بائیں جانب کا رکن

$$r = \text{جم} (۲ن + ۲ط) + \text{خ جب} (۲ن + ۲ط)$$

کے مساوی ہے، اسلئے

$$r = \text{جم} \left( \frac{\text{وا} + \text{وا} - \text{وا}}{۲} \right) + \text{خ جم لا} \left( \frac{\text{وا} - \text{وا} - \text{وا}}{۲} \right)$$

$$\frac{1}{۲} \sqrt{\text{جم} ۲ - (\text{وا} + \text{وا} - \text{وا})} - \text{جم} ۲$$

$$= \frac{1}{۲} \sqrt{\text{جم} ۲ - \text{جم} ۲ - ۲ط - ۲ط}$$

$$= \frac{\text{جم} ۲ - ۲ط - ۲ط}{۲}$$

$$\text{اور ط} = \text{مس} - \text{ا} = \text{جم لا} \frac{\text{وا} - \text{وا} - \text{وا}}{۲} = \text{مس} - \text{ا} = \text{جم لا مس} - \text{ا}$$

اس میں ط اپنی قیود کے ماتحت ہے جو دفعہ ۲۰ میں بیان کی گئی ہیں۔

تب مساوات (۱) سے

$$\text{ویا} (\text{جم} + \text{خ جب د}) = r = \text{جم} (۲ن + ۲ط) + \text{خ جب} (۲ن + ۲ط)$$

$$\text{اسلئے ویا} = r \text{ جس سے ی} = \text{لوک و}$$

$$\text{اور و} = ۲ن + ۲ط$$

$$\therefore \text{لوک جب} (\text{لا} + \text{خا}) = \text{ی} + \text{خو}$$

$$= \text{لوک و} + (۲ن + ۲ط) \text{خ}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ لوک } \left[ \frac{\text{جم} - \text{لا}}{2} \right] + \text{خ} [2\text{ن} + \text{س} - 1 (\text{م لا مسزما})]$$

اس میں ن کو صفر کرنے سے لوٹ جب (لا + خ) کی قیمت خاص معلوم ہو سکتی ہے۔

مشق ۲ - لوٹ (۳-) کی عام قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ

$$\text{لا} + \text{خ} = \text{لوٹ} (۳-)$$

$$\text{اسلئے} \quad \text{ولا} + \text{خ} = ۳ -$$

دفعہ ۸ کی طرح

$$۳ - = \{ \text{جم} (2\text{ن} + \text{س} + \text{ط}) + \text{خ} \text{ جب } (2\text{ن} + \text{س} + \text{ط}) \} \text{ رکھو۔}$$

$$\text{تب } ۳ = \text{ر} \quad \text{اور } \text{ط} = \text{ن}$$

$$\text{اسلئے } ۳ \{ \text{جم} (2\text{ن} + \text{س} + \text{ط}) + \text{خ} \text{ جب } (2\text{ن} + \text{س} + \text{ط}) \}$$

$$= \text{ولا} + \text{خ} = \text{ولا} \times \text{وخا}$$

$$= \text{ولا} \{ \text{جم} + \text{خ} \text{ جب } \text{ما} \}$$

$$\text{لہذا } \text{ولا} = ۳ \text{ جس سے لا} = \text{لوک } ۳ \text{ اور } \text{ما} = 2\text{ن} + \text{س} + \text{ط}$$

$$\therefore \text{لوٹ} (۳-) = \text{لوک } ۳ + (2\text{ن} + \text{س} + \text{ط}) \text{ خ}$$

اس میں ن کو صفر کے مساوی رکھنے سے اس کی قیمت خاص

$$\text{لوک } ۳ + \text{خ}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثلاً ۱۳

ثابت کرو کہ

$$۱ - \text{لوک} (\text{جم} + \text{خ} \text{ جب } \text{ط}) = \text{خ} \text{ ط اگر } \text{ن} - \text{ط} > \text{ن} + \text{ط}$$

- ۲- لوک (۱-۱) = ۲
- ۳- لوک (۱-۱) = ۲
- ۴- لوک (۱+۱) = ۲
- ۵- لوک مس (۱+۱) = ۲
- ۶- لوک جم (۱+۱) = ۲
- ۷- لوک جب (۱+۱) = ۲
- ۸- لوک (۱-۱) = ۲
- ۹- لوک (۱-۱) = ۲
- ۱۰- لوک (۱+۱) = ۲
- ۱۱- لوک (۱-۱) = ۲
- ۱۲- لوک (۱+۱) = ۲
- ۱۳- لوک (۱-۱) = ۲
- ۱۴- لوک (۱+۱) = ۲
- ۱۵- لوک لوک جب (۱+۱) کی قیمت معلوم کرو۔

۸۹۔  $\Delta$  کی تعریف جب  $\Delta$  اور  $\Delta$  کوئی حقیقی یا ملتف مقادیر ہوں

جب  $\Delta$  اور  $\Delta$  حقیقی مقادیر ہوں تو ہم جانتے ہیں کہ

$$\Delta = \text{تو } \Delta \text{ کو } \Delta \dots\dots\dots (\text{دفعہ ۵})$$

لیکن جب  $\Delta$  اور  $\Delta$  دونوں ملتف ہوں تو  $\Delta$  کی معمولی جبر یہ تعریف قائم نہیں رہتی۔

فرض کر دو کہ ہم اس کی (یعنی  $\Delta$  کی) تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ  $\Delta$  اور  $\Delta$  کی تمام قیمتوں کے واسطے خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا ملتف  $\Delta = \text{تو } \Delta \text{ کو } \Delta$

اب بموجب دفعہ ۸ اگر  $\Delta$  ملتف ہو تو  $\Delta$  کو  $\Delta$  کثیر القیمت اور ملتف ہوگا۔ یعنی  $\Delta$  بھی کثیر القیمت اور ملتف ہوگا۔ اسلئے  $\Delta = \text{تو } \Delta \text{ کو } \Delta = \text{تو } \Delta \text{ کو } \Delta$

$\Delta$  کی اس قیمت میں اگر  $\Delta$  کو صفر کر دیا جائے تو محصلہ قیمت  $\Delta$  کی قیمت خاص کہلاتی ہے۔

یعنی  $\Delta$  کی قیمت خاص  $\Delta = \text{تو } \Delta \text{ کو } \Delta$

$$= 1 + \Delta \text{ کو } \Delta + \frac{\Delta}{2} (\text{لوک } \Delta) + \dots\dots\dots (\text{دفعہ ۵۶})$$

دفعہ ۵۶ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر صرف خاص قیمتوں کا لحاظ رکھا جائے تو  $\Delta \times \Delta = \Delta + \Delta$

یعنی  $\Delta$  کی قیمت خاص توت نماؤں کے جبر یہ ضابطہ کو پورا کرتی ہے۔

۹۰۔ یہ بھی آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ اگر  $\Delta$  ملتف ہو تو

$$\text{لوک } (\Delta + 1) = \Delta - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots \text{تالا تناہی}$$

اس کا ثبوت بھی اُس ثبوت کے بعینہ متشابہ ہے جو ما کے حقیقی ہونے کی صورت میں دیا گیا ہے۔ دیکھو دفعہ ۸

بالعموم یہ ضروری ہے کہ ما کا مقیاس ایک سے کم ہو کیونکہ ملقط مقداروں کے لئے مسئلہ ثنائی صرف اسی صورت میں درست ہے دیکھو دفعہ ۲۶

جب ما کا مقیاس ایک کے مساوی ہو یعنی جب ہم ما کو جم ذ + خر جب ذ کے مساوی فرض کر سکیں تو یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ تفصیل بالا درست ہوگی سوائے اُس صورت کے جبکہ ذ، ۲ کا کوئی طاق صنف ہو۔

چونکہ لوک (۱+۱) = ۲ ن خر + ۲ لوک (۱+۱)

اس لئے لوک (۱+۱) = ۲ ن + ۲ - ۱/۲ ما + ۱/۲ ما - ۱/۲ ما + ۱/۲ ما ... مثلاً اتنا ہی ۹۱۔ جملہ (ع + خر بہ) + خر ما کے خیالی اور حقیقی حصوں کو الگ الگ کر دے فرض کرو کہ ع + خر بہ = ر (جم طہ + خر جب طہ)

یعنی بموجب دفعہ ۱۸

$$ر = \frac{ع + خر بہ}{۲} \text{ اور } طہ = مس - \frac{ع}{۲}$$

لہذا حسب تعریف

$$(ع + خر بہ) + خر ما = ۲ (ع + خر بہ) + ۲ (لوک (ع + خر بہ) + خر ما)$$

$$= ۲ (ع + خر بہ) + ۲ (لوک (ع + خر بہ) + خر ما)$$

$$= ۲ (ع + خر بہ) + ۲ (لوک (ع + خر بہ) + خر ما)$$

$$= ۲ (ع + خر بہ) + ۲ (لوک (ع + خر بہ) + خر ما)$$

$$= ۲ (ع + خر بہ) + ۲ (لوک (ع + خر بہ) + خر ما)$$

$$= ۲ (ع + خر بہ) + ۲ (لوک (ع + خر بہ) + خر ما)$$

+ خ جب {ما لوک ر + لا (ط + م ۲) }  
اگر ہم م کو صفر کر دیں تو جملہ مندرجہ بالا کی قیمت خاص معلوم ہو سکتی  
ہے جو حسب ذیل ہے -

۹۲ - مشق ۱ - (۱-۲) کی قیمت عامہ معلوم کرو۔  

$$(۱-۲) = ۱-۲ = ۱-۲$$

لیکن لوک ۱-۲ = لوک [جم (۲ ن + ۲) + خ جب (۲ ن + ۲)]  

$$= \text{لوک } (۲ ن + ۲) + \text{خ } (۲ ن + ۲)$$

$$\therefore (۱-۲) = (۲ ن + ۲) + \text{خ } (۲ ن + ۲)$$

جہاں ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے

نیز (۱-۲) کی قیمت خاص و - ۲ ہے -

مشق ۲ - لوک (۳-) کی قیمت عامہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ لوک (۳-) = لا + خ ما یعنی ۳ = لا + خ ما

یعنی و (لا + خ ما) لوک ۳ = ۳ [جم (۲ م + ۲) + خ جب (۲ م + ۲)] ..... دفعہ ۲۰

لیکن لوک ۲ = ۲ ن خ + لوک ۲ اور ۳ = لوک ۳

∴ و (لا + خ ما) (۲ ن خ + لوک ۲) = لوک ۳ × و (۲ م + ۲) خ

∴ (لا + خ ما) (۲ ن خ + لوک ۲) = لوک ۳ + و (۲ م + ۲) خ

حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$لا لوک ۲ - ۲ ن خ = لوک ۳$$

اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$لا × ۲ ن + ۲ = لوک ۳ + ۲ م + ۲$$

اگر ان مساواتوں کو حل کیا جائے تو

$$لا = \frac{\text{لوک } ۳ \text{ لوک } ۲ + ۲ (۲ + ۲ م ۲) + ۲ ن ۲}{(\text{لوک } ۲) + ۲ م + ۲ ن}$$

$$اور ما = \frac{(۲ + ۲ م ۲) \text{ لوک } ۲ - ۲ ن ۲ \text{ لوک } ۳}{(\text{لوک } ۲) + ۲ م + ۲ ن}$$

لہذا لوک م (۳-)

$$= \frac{\{\text{لوک } ۳ \text{ لوک } ۲ + ۲ ن (۱ + م ۲) + ۲ م (۱ + م ۲) \text{ لوک } ۲ - ۲ ن ۲ \text{ لوک } ۳\}}{(\text{لوک } ۲) + ۲ م + ۲ ن}$$

م = ن = ۰ . لکھنے سے قیمت خاص حاصل ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{لوک } ۳ + ۲ م}{\text{لوک } ۲}$$

۹۳- اس موقع پر یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ ملف مقادیر کے  
دکارتموں کی عام قیمتیں لوکارتموں کے معمولی ضوابط کو پورا کرتی ہیں

$$\text{یعنی } \text{لوک } م ن = \text{لوک } م + \text{لوک } ن$$

$$\text{اور } \text{لوک } \frac{م}{ن} = \text{لوک } م - \text{لوک } ن$$

نیز یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ  $\text{لوک } م = \text{لوک } م + ۲ ع خ م$   
جہاں ع صفریا کسی صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔ اس کا ثبوت طالب علم  
کے لئے مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے۔

مشکلہ م ۱

ثابت کرو کہ

$$۱- (خ = قو ۲) \{ \text{جم (لوک } ۱) + خ جب (لوک } ۱) \}$$

$$۲ - خ = جم = \{ ۱۲ ( \frac{۱}{۲} + ۲ ) \} + خ جب \{ ۱۲ ( \frac{۱}{۲} + ۲ ) \}$$

$$۳ - خ = جم + ط جب ط$$

$$جہاں ط = ۱۲ ( \frac{۱}{۲} + ۲ ) - و = ( \frac{۱۱}{۲} + ۲۲ )$$

$$۴ - خ = ۱۲ ( \frac{۱}{۲} + ۲ ) + ۱ = ۱۳ ( \frac{۱}{۲} + ۲ )$$

تو ثابت کرو کہ

$$مس = \frac{۱۲}{۲} = ۶ اور ۱۲ + ۲ = ۱۴ = ۲۸$$

$$۵ - اگر ۱۲ + ۲ = ۱۴ = ۲۸ تو ثابت کرو کہ$$

$$۱۲ + ۲ = ۱۴ = ۲۸$$

$$۶ - اگر ( ۱۲ + ۲ ) = ۱۴ = ۲۸ تو ثابت کرو کہ مس = ۶ کی ایک$$

$$قیمت ۱۲ + ۲ = ۱۴ = ۲۸ ہے -$$

$$۷ - اگر ( ۱۲ + ۲ ) = ۱۴ = ۲۸ تو ثابت کرو کہ ۱۲ کی قیمتوں میں سے ایک$$

$$قیمت مس = ۶ ہے -$$

$$۸ - اگر ۱۲ + ۲ = ۱۴ = ۲۸ اور اس مساوات کی اول الذکر رقم کی$$

$$صرف خاص قیمتوں سے بحث کی جائے تو ثابت کرو کہ$$

$$۱۲ = ۱۲ ( ۱۲ + ۲ ) - ق مس = ۱۲ ( ۱۲ + ۲ )$$

$$اور لک ۱۲ ( ۱۲ + ۲ ) = ۱۲ ( ۱۲ + ۲ )$$

$$۹ - ثابت کرو کہ ۱۲ ( ۱۲ + ۲ ) کی قیمت خاص کا حقیقی حصہ$$



$$\text{و } \frac{2n}{n} \text{ جم } \left( \frac{n}{2} \text{ لوک } 2 \right) \text{ ہے۔}$$

۱۰۔ ثابت کر دو کہ  $(b+x)$  کی قیمت خاص بالتمام حقیقی ہوگی اگر

$$\frac{1}{4} \text{ ہر لوک } (b+x) + \text{عس} - \frac{1}{4}$$

$\frac{n}{4}$  کا کوئی جفت، ضعف ہو اور خیالی ہوگی اگر یہ  $\frac{n}{4}$  کا کوئی طاق ضعف ہو۔

۱۱۔ ثابت کر دو کہ  $(a+x)$  کی قیمت عام

$$\text{و } 2n \text{ جم } \{ \text{لوک جم ع} \} + x \text{ جب } \{ \text{لوک جم ع} \} \text{ ہے۔}$$

$$12 \text{۔ اگر } \left( \frac{a+x}{1-x} \right) = \frac{a+x}{1-x} \text{ لا } + x \text{ ما}$$

تو ثابت کر دو کہ عس  $1 - \frac{a}{x}$  کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

$$\text{ہوگی۔} \quad \text{عس } 1 - \left( \frac{a}{x} \right) + \frac{a}{x} \text{ لوک } \frac{a^2 + 2(a+x)}{x^2 + 2(x-a)}$$

$$13 \text{۔ ثابت کر دو کہ لوک } (1-x) = \frac{1+x}{1+x}$$

جہاں  $x$  اور  $n$  سے کوئی صحیح اعداد مراد ہیں۔

۱۴۔ ثابت کر دو کہ لوک  $(2-x)$  کی عام قیمت

$$\text{ہے } \frac{2n(1+x) + 2(2-x)}{2n^2 + 2(2-x)} + \frac{2n(1+x) + 2(2-x)}{2n^2 + 2(2-x)}$$

بتاؤ کہ ذیل کے دوسلوں میں جو استدلال کیا گیا ہے، اس میں کہاں غلطی ہے؟

۱۵۔ جب  $n$  کوئی صحیح عدد ہو تو

$$2n \times n = \text{جم } 2n + x \text{ جب } 2n = 1$$

$$\text{یعنی } 2n \times n = 2n^2 = 2n \times n = \dots \dots \dots$$

ان سب کو  $1-x$  کی قوت پر اٹھانے سے

$$\dots\dots\dots = \pi^2 = \pi^2 - \pi = \pi^2 - \pi = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \pi^2 = \pi^2 - \pi = \pi^2 - \pi = \dots\dots\dots$$

۱۶۔ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم}(\pi - \pi) + \text{خر}(\pi - \pi) = \text{جم}(\pi + \pi) + \text{خر}(\pi + \pi)$$

$$\text{یعنی} \quad \text{خر}(\pi - \pi) = \text{خر}(\pi + \pi)$$

$$\text{لہذا} \quad \pi - \pi = \pi + \pi \quad \text{یعنی} \quad \pi = \pi$$

۱۷۔ اگر لا اور ما دو ملحق عدد ہوں اور ان کی سمت کی خاص قیمتیں طہ اور فہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک لا} + \text{لوک لا} = \text{لوک لا} + \text{لوک لا} + \pi - \pi$$

$$\text{جہاں } \pi = ۱, \text{ اگر } \pi + \pi \text{ بڑا ہو } \pi \text{ سے}$$

$$\text{یا } \pi = ۰, \text{ اگر } \pi + \pi \text{ بڑا ہو } -\pi \text{ سے اور بڑا نہ ہو } \pi \text{ سے}$$

$$\text{یا } \pi = ۱, \text{ اگر } \pi + \pi \text{ بڑا نہ ہو } -\pi \text{ سے}$$



# باب ہفتم

گرگوری کا سلسلہ -  $\pi$  کی قیمت کا محسوب کرنا

۹۴ - گرگوری کا سلسلہ -

ثابت کرو کہ اگر طہ -  $\frac{\pi}{2}$  سے کم نہ ہو اور  $\frac{\pi}{2}$  سے زیادہ نہ ہو تو  
طہ = مس طہ -  $\frac{1}{16}$  مس طہ +  $\frac{1}{8}$  مس طہ - ..... تالائیں ہی

ظاہر ہے کہ

۱ + خ مس طہ = قط طہ (جم طہ + خ جب طہ)

= قط طہ  $\times$  نو طہ

اس لئے دفعہ ۸۳ کی مدد سے

لوک نو قط طہ + خ طہ = لوک (۱ + خ مس طہ)

اس لئے دفعہ ۹۰ کی رو سے اگر مس طہ تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو تو

لوک نو (قط طہ) + خ طہ

= لوک (۱ + خ مس طہ)

= خ مس طہ -  $\frac{1}{4}$  خ مس طہ +  $\frac{1}{16}$  خ مس طہ - ..... تالائیں ہی

= خ مس طہ +  $\frac{1}{4}$  خ مس طہ -  $\frac{1}{16}$  خ مس طہ -  $\frac{1}{64}$  مس طہ + ..... تالائیں ہی

اس مساوات کے خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے  

$$\text{طہ} = \text{مس طہ} - \frac{1}{12} \text{مس طہ} + \frac{1}{6} \text{مس طہ} - \frac{1}{2} \text{مس طہ} + \dots \text{تا لٹنا ہی}$$
 (۱) .....

ظاہر ہے کہ یہ سلسلہ ان حادہ زاویوں کے لئے درست ہے جن کا  $\frac{\pi}{2}$  سے بڑا نہیں ہونا گویا یہ سلسلہ ان سب زوایا کے لئے جو  $\frac{\pi}{2}$  اور  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  کے درمیان واقع ہوتے ہیں اور نیز زوایا  $\frac{\pi}{2}$  اور  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  کے لئے درست ہے۔

۹۵۔ دفعہ ما قبل کے سلسلہ میں اگر ہم  $\text{مس طہ}$  کی بجائے  $\text{لا لکھیں}$  یعنی جب  $\text{لا}$  بڑا نہ ہو ' سے اور چھوٹا نہ ہو ' اسے تو ہم سلسلہ بالا کو ذیل کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس}^1 \text{لا} = \text{لا} - \frac{1}{12} \text{لا}^2 + \frac{1}{6} \text{لا}^3 - \frac{1}{2} \text{لا}^4 + \dots \text{تا لٹنا ہی}$$
 جہاں  $\text{مس}^1 \text{لا}$  کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  اور  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  کے درمیان واقع ہے۔

۹۶۔ گرگیوری کا سلسلہ ذیل کے عام مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔  
 اگر زاویہ  $\text{طہ}$  کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  اور  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  کے درمیان واقع ہو یا ان دو انتہائی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو تو

$$\text{طہ} - \frac{\pi}{2} = \text{مس طہ} - \frac{1}{12} \text{مس طہ} + \frac{1}{6} \text{مس طہ} - \frac{1}{2} \text{مس طہ} + \dots \text{تا لٹنا ہی}$$

فرض کرو کہ  $\text{طہ} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  جہاں  $\frac{\pi}{2}$  سے بڑا نہیں ہے اور  $\frac{\pi}{2}$  سے چھوٹا نہیں ہے۔

تب  $1 + \text{مس طہ} = 1 + \text{مس}^1 \text{فہ} = \text{قط فہ} (\text{جم فہ} + \text{خر جب فہ})$

$$= \text{قط فہ} \times \text{و خ فہ}$$

لہذا اگر مسطہ نقداً ایک سے بڑا نہ ہو تو دفعات ۸۳ اور ۹۰ کی رو سے ظاہر ہے کہ

لوک، قطاف + خرفہ = لوک (۱ + خ مس ط)

$$= \text{خمس ط} - \frac{1}{4} \text{خمس ط} + \frac{1}{4} \text{خمس ط} - \dots$$

$$= \text{خمس ط} + \frac{1}{4} \text{مس ط} - \frac{1}{10} \text{خمس ط} + \frac{1}{10} \text{مس ط} + \frac{1}{10} \text{مس ط}$$

..... ۱/۲ خس طه ..... تا لاتناهی

مسادات بالاکے ہر دو جانب کے خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے

سے فہ = مس ط -  $\frac{1}{2}$  مس ط +  $\frac{1}{2}$  مس ط - ..... تالا متناہی

یعنی ط - ف = ۲ = مس ط -  $\frac{1}{2}$  مس ط +  $\frac{1}{2}$  مس ط - ..... مالاتا ہی

(1) ...

#### ۹۷۔ خاص صورتیں۔

اگر  $\frac{11}{12}$  اور  $\frac{13}{12}$  کے درمیان یعنی  $\frac{11}{12} - 1$  اور  $1 + \frac{11}{12}$  کے درمیان

واقع ہو تو ظاہر ہے کہ  $f = 1$  تب دہم گزشتہ کی مساوات (۱) ذیل کی

صورت اختیار کرتی ہے۔

ط - ۳۰ مس ط -  $\frac{1}{4}$  مس ط +  $\frac{1}{6}$  مس ط - ..... تا انتهای

اگر  $\frac{\pi}{6}$  اور  $\frac{\pi}{9}$  کے درمیان یعنی  $\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{6}$  اور  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{9}$  کے درمیان

واقع ہو تو مساوات مذکورہ حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

ط - ۲۲ مسط -  $\frac{1}{4}$  مسط +  $\frac{1}{8}$  مسط - ..... ۳۰ لائٹنای

اسی طرح سے اگر  $\frac{\pi}{2}$  اور  $\frac{\pi}{4}$  کے درمیان یعنی  $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$  اور

۳۲ + ۳۳ کے درمیان واقع ہوتوف = ۳ - اور مساوات بالاسب ذیل ہو جاتی ہے

ط ۱۱۳ = مس ط -  $\frac{1}{3}$  مس ط +  $\frac{1}{9}$  مس ط - ..... تا لا تنای

۹۸۔ اگر  $\frac{\pi}{۴}$  اور  $\frac{\pi}{۳}$  کے درمیان یا  $\frac{\pi}{۵}$  اور  $\frac{\pi}{۴}$  کے درمیان

..... یا بالعموم  $n + \frac{n}{2}$  اور  $n + \frac{n}{2}$  کے درمیان واقع ہو تو مسطہ تعداد ایک سے بڑا ہوگا۔ اسلئے ان صورتوں میں لوک  $(1 + n \text{ مسطہ})$  کی تفصیل برقرار نہیں رہے گی، بنا بریں دفعہ ۹۶ کی تفصیل (۱) کی کسی کوئی تفصیل حاصل نہیں ہوگی۔

### ۹۹۔ ۲ کی قیمت

گر گوری کے سلسلہ کا ایک خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کے استعمال سے ۲ کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

دفعہ ۹۵ میں لا = ۱ رکھو، تب

$$\frac{7}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) - \dots$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{8 \times 4} + \frac{1}{16 \times 8} + \dots\right]$$

اس سلسلہ سے ۲ کی قیمت محسوب کی جاسکتی ہے۔ لیکن اس سلسلہ میں بڑا نقص یہ ہے کہ اس کی رقیں جلدی جلدی کم نہیں ہوتیں، اس لئے اگر ۲ کی قیمت کافی حد تک درست نکالنا مقصود ہو تو رقم کی ایک بڑی تعداد لینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ لامحالہ اور سلسلے جو بیکر نے پڑے ہیں۔

### ۱۰۰۔ آئیملر کا سلسلہ

ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{7}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

دفعہ ۹۵ میں لا کو بالترتیب

$$\frac{1}{3} \text{ اور } \frac{1}{5}$$

کے مساوی رکھو۔ تب

$$\frac{2}{3} = \text{مس} - \frac{1}{3} + \text{مس} - \frac{1}{5}$$

$$\dots\dots\dots \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \dots\dots\dots$$

یہ سلسلہ دفعہ ما قبل کے سلسلہ کی نسبت زیادہ جلدی جلدی گھٹتا ہے لیکن ۳ کی قیمت کو اعتنا یہ کہ ساتویں مقام تک درست نکالنے کے لئے مس -  $\frac{1}{3}$  کے سلسلہ میں ۱۱ سے زیادہ رقوم لینے کی ضرورت ہے۔

۱۰- میکن کا سلسلہ

مندرجہ بالا سلاسل سے زیادہ مستحق سلسلہ میکن کا دریافت کردہ ہے جو ذیل کی مساوات سے ماخوذ ہوتا ہے۔

$$\frac{2}{3} = \text{مس} - \frac{1}{5} + \text{مس} - \frac{1}{3} + \text{مس} - \frac{1}{5} + \dots\dots\dots$$

..... دفعہ ۲۴۶ حصہ اول مشق ۴

دفعہ ۹۵ میں لا کی بجائے بالترتیب  $\frac{1}{5}$  اور  $\frac{1}{3}$  رکھنے سے

$$\left[ \dots\dots\dots + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right] 2 = \frac{2}{3}$$

$$\left[ \dots\dots\dots - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \dots\dots\dots \right] -$$

$$\left[ \dots\dots\dots + \frac{2}{11} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{11} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{11} \times \frac{1}{3} - \frac{2}{11} \right] 14 = 2$$

$$\left[ \dots\dots\dots - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \dots\dots\dots \right] 2 =$$

$$۳۵۲ = \frac{۲}{۱۰} \times ۱۴$$

$$۵۰۰۱۰۲۲ = \frac{۲}{۵۱۰} \times \frac{۱}{۵} \times ۱۴$$

$$۵۰۰۰۰۰۰۹۱۰۲ = \frac{۹۲}{۹۱۰} \times \frac{۱}{۹} \times ۱۴$$

.....

$$۵۰۰۰۰۰۰۰۹۴۴ = \frac{۱}{۳۳۹} \times \frac{۱}{۳} \times ۲$$

$$۳۵۲۰۱۰۲۵۰۰۴۹$$

$$۵۰۲۲۴۴۴۴۴۴... = \frac{۲۲}{۲۱۰} \times \frac{۱}{۲} \times ۱۴$$

$$۵۰۰۰۰۰۲۹۲۵۴۱... = \frac{۲}{۲۱۰} \times \frac{۱}{۲} \times ۱۴$$

$$۵۰۰۰۰۰۰۰۲۹۸... = \frac{۲۹}{۲۱۰} \times \frac{۱}{۸} \times ۱۴$$

.....

$$۵۰۱۴۴۳۴۳۰۱۴... = \frac{۱}{۲۳۹} \times ۲$$

$$۵۰۵۹۴۳۲۳۵۵۲$$

$$۳۵۲۰۱۰۲۵۰۰۴۹$$

لہذا

$$-۵۰۵۹۴۳۲۳۵۵۲$$

$$۳۵۱۴۱۵۹۲۴۵/۲۴ = ۱۱$$

۱۱ کی یہ قیمت اعشاریہ کے آٹھویں مقام تک درست ہے۔

اگر پہلے سلسلہ میں سے ۲۱ رقوم لی جائیں اور دوسرے سلسلہ

میں سے ۳، تو ۱۱ کی قیمت اعشاریہ کے سولہویں مقام تک درست نکالی جاسکتی ہے

۱۰۲- رو تھر فورڈ کا سلسلہ



لیکن کے سلسلہ کو ذیل کی مساوات اور بھی آسان بنا دیتی ہے۔

$$\begin{aligned} ۳ \text{ مس}^۱ - \frac{۱}{۵} \text{ مس}^۱ - \frac{۱}{۲} \text{ مس}^۱ + \frac{۱}{۹۹} \text{ مس}^۱ &= \frac{۳}{۹۹} \\ \text{کیونکہ مس}^۱ - \frac{۱}{۲} \text{ مس}^۱ - \frac{۱}{۹۹} \text{ مس}^۱ &= \frac{۱}{۹۹} \text{ مس}^۱ - \frac{۱}{۲} \text{ مس}^۱ + ۱ \\ \frac{۱}{۹۹} \times \frac{۱}{۲} + ۱ & \end{aligned}$$

$$\text{مس}^۱ - \frac{۲۹}{۹۹} \text{ مس}^۱ = \frac{۱}{۲۳۹}$$

امثلہ ۱۵

اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ

$$\text{ط} - \text{ن} = ۳ = \text{مس}^۳ - \frac{۱}{۳} \text{ مس}^۳ + \frac{۱}{۵} \text{ مس}^۳ - \dots$$

تو ن کی قیمت معلوم کرو جبکہ ط ذیل کی رقوم کے درمیان واقع ہو

$$\begin{aligned} (۱) \quad \frac{۳}{۱۱} \text{ مس}^۱ \text{ اور } \frac{۳}{۱۳} \text{ مس}^۱ \text{ کے} & \quad (۲) \quad \frac{۳}{۴} \text{ مس}^۱ \text{ اور } \frac{۳}{۹} \text{ مس}^۱ \text{ کے} \\ (۳) \quad \frac{۳}{۱۹} \text{ مس}^۱ \text{ اور } \frac{۳}{۲۱} \text{ مس}^۱ \text{ کے} & \quad (۴) \quad \frac{۳}{۳} \text{ مس}^۱ \text{ اور } \frac{۳}{۵} \text{ مس}^۱ \text{ کے} \\ (۵) \quad \frac{۳}{۱۱} \text{ مس}^۱ \text{ اور } \frac{۳}{۱۳} \text{ مس}^۱ \text{ کے} & \end{aligned}$$

۴ - ثابت کرو کہ

$$\left\{ ۳ = ۲ - ۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲ \times ۵} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \dots \right\}$$

۵ - ثابت کرو کہ

$$\frac{۳}{۴} = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۵} + \left( \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} \right) \frac{۱}{۳} - \left( \frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۳} \right) \frac{۱}{۵} - \dots$$

۸ - اگر لا > ۲ - ۱ تو ثابت کرو کہ

$$۲ \left( \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۴} - \dots \right) \text{ سالانہ ہی}$$

$$= \frac{۷۲}{۲۷ - ۱} - \frac{۱}{۳} \left( \frac{۷۲}{۲۷ - ۱} \right) + \frac{۱}{۵} \left( \frac{۷۲}{۲۷ - ۱} \right) - \dots \text{ سالانہ ہی}$$

ذیل کے سلسلوں سے ۱۱ کی قیمت محسوب کرو جو اعشاریہ کے تیسرے

مقام تک درست ہو۔

۹۔  $\frac{1}{9}$  اینفر کے سلسلے سے

۱۰۔  $\frac{1}{10}$  میکن کے سلسلے سے

۱۱۔ دو تھر فورڈ کے سلسلے سے

۱۲۔ ثابت کرو کہ دوسرے مرتبہ کی مقادیر صغیرہ تک

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots$  جب  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots$

$$= \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = 1$$

۱۳۔ اگر  $\frac{1}{p}$  اور  $\frac{1}{q}$  (قططہ) دونوں صغیر اور  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  کے درمیان واقع ہوں

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{مس}^1 (\text{قططہ}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{مس}^2 \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{مس}^3 \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \dots$$

# باب ہشتم

## سلسلوں کو جمع کرنا

### سلسلوں میں پھیلا نا

۱۰۳- اب ہم گزشتہ ابواب کے نتائج کو چند مثلثی سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرنے میں استعمال کریں گے۔

مشہور سلسلوں کو چار اقسام میں منقسم کیا جاسکتا ہے

(۱) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر سلسلہ ہندسیہ پر مبنی ہوتی ہے۔

(۲) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر مسندہ شنائی پر مبنی ہوتی ہے۔

(۳) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر مسندہ قوت نما پر (جیب اور جیب التمام کے سلسلے بھی اسی میں شامل ہیں) منحصر ہوتی ہے۔

(۴) وہ سلسلے جن کی جمع لوکار تھی سلسلہ پر (گرگوری سلسلہ بھی اسی میں شامل ہے) منحصر ہوتی ہے۔

۱۰۴- دفعات ۱۰۵-۱۰۸ میں ہم مندرجہ بالا اقسام میں سے ایک ایک سلسلہ بطور مثال جمع کریں گے۔

نیز جب ضعفی زاویوں کی جیوب (مثلاً جب  $\alpha$ ، جب  $\beta$ ، جب  $\gamma$ ) کے کسی سلسلہ کو جمع کرنا مقصود ہو تو ابھی معلوم ہو جائیگا کہ

بالعموم انہی ضعفی زاویوں کی جیوب التمام (مثلاً جب  $\alpha$ ، جب  $\beta$ ، جب  $\gamma$ )



$$\text{م} = \frac{\text{ج} - \text{ج}^2 \text{ جم} \text{ ن عہ} + \text{ج}^3 + \text{جم} (\text{ن} - 1) \text{ عہ}}{\text{ج}^2 - 1 \text{ ج}^2 \text{ جم} \text{ عہ} + \text{ج}^2}$$

اور خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{ج} = \frac{\text{ج} \text{ جب عہ} - \text{ج}^2 \text{ جب ن عہ} + \text{ج}^3 + \text{جب} (\text{ن} - 1) \text{ عہ}}{\text{ج}^2 - 1 \text{ ج}^2 \text{ جم} \text{ عہ} + \text{ج}^2}$$

اگر سلسلہ ہذا کا حاصل جمع لاتنا ہی تک معلوم کرنا مطلوب ہو تو اُن رقوم کو جن میں ج<sup>۱</sup> اور ج<sup>۲</sup> شامل ہیں چھوڑ دینا کافی ہو گا کیونکہ جب ن لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے تو یہ رقمیں صفر ہو جاتی ہیں۔

$$\text{پس م} = \frac{\text{ج} - \text{ج}^2 \text{ جم} \text{ عہ}}{\text{ج}^2 - 1 \text{ ج}^2 \text{ جم} \text{ عہ} + \text{ج}^2}$$

$$\text{اور ج} = \frac{\text{ج} \text{ جب عہ}}{\text{ج}^2 - 1 \text{ ج}^2 \text{ جم} \text{ عہ} + \text{ج}^2}$$

[نوٹ۔ م اور ج کے لئے جو رقوم اوپر حاصل ہوئی ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ سلاسل زیر بحث کی جمع، خیالی مقادیر کے استعمال کے بغیر بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

سادات (۱) و (۲) کے دونوں جانب مقدار ۱ - ج<sup>۲</sup> جم عہ + ج<sup>۳</sup> کے ساتھ ضرب دینے سے معلوم ہو گا کہ ج<sup>۱</sup>، ج<sup>۲</sup>، ج<sup>۳</sup>، ... کے سرعائب ہو جاتے ہیں اور بعدہ 'م' اور ج کی قیمتیں باسانی معلوم ہو جاتی ہیں۔]

۱۰۹۔ مشق۔ سلسلہ

$$\frac{1}{4} \text{ جب عہ} + \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \text{ جب ۲ عہ} + \frac{5 \times 3 \times 1}{4 \times 2 \times 2} \text{ جب ۳ عہ} + \dots \text{ تا لاتنا ہی کو جمع کرو۔}$$

$$\text{فرض کرو کہ ج} = \frac{1}{4} \text{ جب } ۲ \text{ ع} + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} \text{ جب } ۲ \text{ ع} + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} \text{ جب } ۳ \text{ ع} + \dots$$

$$\text{اور } ۳ = ۱ + \frac{1}{4} \text{ جم } ۲ \text{ ع} + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} \text{ جم } ۲ \text{ ع} + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} \text{ جم } ۳ \text{ ع} + \dots$$

اس لئے پہلے سلسلہ کو خ سے ضرب دیکر دوسرے سلسلہ میں جمع کرنے سے

$$۳ + \text{خ ج} = ۱ + \frac{1}{4} \text{ خ ع} + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} \text{ خ ع} + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} \text{ خ ع} + \dots$$

$$= (۱ - \frac{1}{4} \text{ خ ع}) \text{ اگر ع } ۲ \text{ ن } ۲$$

سلسلہ ثنائی کی رو سے... (دو خطا)

$$= ۳ + \text{خ ج} = \{ ۱ - \text{جم ع} - \text{خ جب ع} \}$$

$$= \{ ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ ع} (\text{جب } \frac{۱}{۴} \text{ ع} - \text{خ جم } \frac{۱}{۴} \text{ ع}) \}$$

$$= \{ ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ ع} \} \{ \text{جم} (\frac{۱}{۴} \text{ ع} - \frac{۱}{۴}) + \text{خ جب} (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}) \}$$

$$= \{ ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ ع} \} \{ \text{جم } \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} + \text{خ جب } \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} \}$$

اب حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$م = \{ ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ ع} \} \{ \text{جم } \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} \}$$

اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$$ج = \{ ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۴} \text{ ع} \} \{ \text{جب} (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}) \}$$

$$\text{اگر ع} = ۲ \text{ ن } ۲ \text{ تو ظاہر ہے کہ ج} = ۰ \text{ اور م} = ۵۵$$

۱۴ مثل

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو:-

(۱) جیب  $\alpha$  + جیب  $\frac{1}{p}\alpha$  + جیب  $\frac{1}{p^2}\alpha$  + ..... تا انتہائی

(۲) حجم<sup>۱</sup> + حجم<sup>۲</sup> + حجم<sup>۳</sup> + ..... = مالتائی

(۳) جیب ۴ × جیب ۳ + جیب ۲ + جیب ۱ = جیب ۳ + جیب ۲ + جیب ۱ ..... تا لا انتہائی

جہاں  $\neq \frac{7}{4}$

(۴) جب ۷ جم + جب ۷ جم + جب ۳ جم ..... = اناستہی

جہاں  $\neq \pm \frac{\pi}{2}$

(۵) جب غ + ج جب (ع + ہ) + ج<sup>۲</sup> جب (ع + ہ) + ..... +

ن رقوم تک اور لا مننا ہی تک

(۶) ج ججز ج + ج ججز ج + ..... + ج ججز ج (ج - ۱) ج

(۷) ج جبر ۷ + ج<sup>۲</sup> جبر ۲ + ج<sup>۳</sup> جبر ۳ + ..... تا انتہائی

(۸) ۱- ۲ جمعه + ۳ جمعه - ۴ جمعه + ..... تا نهم

(۹) ۳ جیب ۴ + ۵ جیب ۲ + ۶ جیب ۳ + ..... تان رقوم

(۱۰) اگر  $\frac{7}{11}$  = توسیق (۳) اور مشق (۴) کے سلسلوں کی قیمتیں دریافت کریں۔

$$(1) \text{ جب } m + n \text{ جب } (m + n) + \frac{n(n-1)}{2} + \dots + (n+1) \text{ جب } n$$

جہاں ن کسی مثبت صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔

(۱۲) جب  $\frac{1}{p}$  جب ۳ عدہ +  $\frac{1}{q}$  جب ۳ عدہ + ..... تا الائنہ ہی

$$(13) \text{ جم } n \text{ ع} - n \text{ جم } n-1 \text{ ع} + \frac{n(n-1)}{2} \text{ جم } n-2 \text{ ع} + \text{جم } n-3 \text{ ع} + \dots$$

تادان (۱ +) رقوم

جہاں  $n$  کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

$$(۱۴) \quad n \text{ جب } ۱ + \frac{n(n+1)}{2 \times 1} \text{ جب } ۲ + \frac{n(n+1)(۲+۱)}{3 \times 2 \times 1} \text{ جب } ۳ + \dots +$$

$$(۱۵) \quad ۱ + \frac{1}{۲} \text{ جم } ۲ - \frac{1}{۲ \times ۲} \text{ جم } ۴ + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۳ \times ۲} \text{ جم } ۶ + \dots +$$

$$(۱۶) \quad \text{جزی } ۱ + n \text{ جزی } ۲ + \frac{n(n-1)}{۲} \text{ جزی } ۳ + \dots + (n+1) \text{ قوم تک}$$

جہاں  $n$  کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۰۔ مشتق - ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

$$۱ + \frac{\text{ج}^۲ \text{ جم } ۲}{۲} + \frac{\text{ج}^۳ \text{ جم } ۴}{۴} + \dots +$$

$$\text{فرض کرو کہ } ۱ + \frac{\text{ج}^۲ \text{ جم } ۲}{۲} + \frac{\text{ج}^۳ \text{ جم } ۴}{۴} + \dots + \text{تا لائنہ } (۱)$$

$$\text{اور } \text{ج} = \frac{\text{ج}^۲ \text{ جب } ۲}{۲} + \frac{\text{ج}^۳ \text{ جب } ۴}{۴} + \dots + \text{تا لائنہ } (۲)$$

$$\text{اسلئے} \\ \text{م} + \text{خ ج} = ۱ + \frac{\text{ج}^۲ \text{ دو خطہ}}{۲} + \frac{\text{ج}^۴ \text{ دو خطہ}}{۴} + \dots + \text{تا لائنہ}$$

$$= ۱ + \frac{۶}{۲} + \frac{۴}{۴} + \frac{۶}{۶} + \dots$$

جہاں  $\text{ج}$  دو خطہ یعنی  $\text{ج}$  (جم طہ + خ جب طہ) کی بجائے 'ما' لکھا گیا ہے

$$\therefore \text{م} + \text{خ ج} = \frac{\text{دوا} + \text{دوا}}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ دو جم طہ} + \text{خ ج جب طہ} - \frac{۱}{۲} \text{ دو جم طہ} - \text{خ ج جب طہ} \dots (۳)$$



$$= \frac{1}{4} \text{ وجہ جم } [\text{جم (ج جب ط)} + \text{خ جب (ج جب ط)}] \\ + \frac{1}{4} \text{ وجہ جم } [\text{جم (ج جب ط)} - \text{خ جب (ج جب ط)}] \\ \dots\dots\dots (\text{دفعہ } ۶۲)$$

اسلئے حقیقی حصوں کو باہم برابر کرنے سے

$$م = \frac{1}{4} \text{ جم (ج جب ط)} [\text{وجہ جم ط} + \text{وجہ جم ط}]$$

$$= \text{جم (ج جب ط) جنز (ج جم ط)}$$

اور خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{ج} = \frac{1}{4} \text{ جب (ج جب ط)} \{ \text{وجہ جم ط} - \text{وجہ جم ط} \}$$

$$= \text{جب (ج جب ط) جنز (ج جم ط)}$$

متبادل ثبوت

مساوات (۳) سے

$$م + \text{خ ج} = \frac{1}{4} \text{ وجہ جب ط} - \text{خ ج جم ط} + \frac{1}{4} \text{ وجہ جب ط} - \text{خ ج جم ط}$$

$$= \text{جم (ج جب ط) - خ ج جم ط} \dots\dots\dots (\text{دفعہ } ۶۲)$$

$$= [\text{جم (ج جب ط) جم (خ ج جم ط)} + \text{جب (ج جب ط) جب (خ ج جم ط)}]$$

$$= [\text{جم (ج جب ط) جنز (ج جم ط)} + \text{خ جب (ج جب ط) جنز (ج جم ط)}] \dots\dots\dots (\text{دفعہ } ۶۲)$$

اس سے م اور ج کی قیمتیں حسب سابق حاصل ہو سکتی ہیں۔

۸:۱ سے مشتق - ذیل کے دو سلسلوں

$$\text{ج جب م} + \frac{1}{4} \text{ جب م} + \frac{1}{4} \text{ جب م} + \dots\dots\dots \text{تالانتا ہی}$$

$$\text{اور ج جم م} + \frac{1}{4} \text{ جم م} + \frac{1}{4} \text{ جم م} + \dots\dots\dots \text{تالانتا ہی}$$

کو الگ الگ جمع کرو جبکہ ج تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو۔

فرض کرو کہ اوپر کے سلسلے بالترتیب ج اور م کے مساوی ہیں تب جب سابق

$$م + م + ج = ج (جم + م + ج) + ج (جم + م + ج) + ج (جم + م + ج) + \dots$$

$$= ج + م + ج + ج + م + ج + ج + م + ج + \dots (۱)$$

$$= - لوک [۱-ج + م] دفعہ ۹۰ کی رو سے \dots (۲)$$

$$= - لوک [۱-ج + م - ج + م] دفعہ ۹۲$$

فرض کرو کہ ۱-ج + م = رجم طہ اور -ج + م = رجب طہ

$$\text{یعنی } ر = ۱ - ج + م + ۱ - ج + م + ۱ - ج + م + \dots = ۱ - ج + م$$

اور رجب طہ = -ج + م

$$\text{یعنی طہ} = مس - ۱ - ج + م \dots \dots \dots [\text{زیر شرائط دفعہ ۲۰}]$$

$$م + م + ج = - لوک [۱ - ج + م + ۱ - ج + م + ۱ - ج + م + \dots] (جم + م + ج طہ)$$

$$= - لوک [۱ - ج + م + ۱ - ج + م + ۱ - ج + م + \dots] (جم + م + ج طہ)$$

$$= - لوک [۱ - ج + م + ۱ - ج + م + ۱ - ج + م + \dots] (جم + م + ج طہ)$$

$$م = - لوک [۱ - ج + م + ۱ - ج + م + ۱ - ج + م + \dots] (جم + م + ج طہ)$$

$$= - ۱/۲ لوک (۱ - ج + م + ۱ - ج + م + ۱ - ج + م + \dots) (۳)$$

$$\text{اور ج} = طہ = مس - ۱ - ج + م \dots \dots \dots (۴)$$

مستثنیٰ صورتیں

اگر ج = ۱ تو مقدار (۲)

= - لوک [۱-جم عہ - خر جب عہ] = - لوک [۱+جم (عہ-۲) + خر جب (عہ-۲)]  
 دفعہ ۹۰ کی رو سے یہ رقم ہمیشہ سلسلہ (۱) کے مساوی ہوتی ہے سوائے اس  
 صورت کے جبکہ عہ = ۱۱ (۲+۱) کے برابر ہو یعنی سوائے اس صورت  
 کے جبکہ عہ ۲۲ کا کوئی ضعف ہو۔

اس صورت میں ج = -

$$\text{اور } ۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۵} + \dots = ۱$$

جو صریحاً ایک متع سلسلہ ہے

اگر ج = - ۱، تو مقدار (۲) = - لوک (۱+جم عہ + خر جب عہ)  
 دفعہ ۹۰ کی رو سے یہ رقم ہمیشہ سلسلہ (۱) کے مساوی ہوتی ہے سوائے  
 اس صورت کے جبکہ عہ = ۱۱ (۲+۱) کے برابر ہو۔

اس صورت میں ج = -

$$\text{اور } ۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۵} + \dots = ۱$$

پس مقادیر (۳) اور (۴) دو سلسلوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتی ہیں  
 سوائے ان صورتوں کے جب

$$(۱) \text{ ج } = ۱ \text{ اور عہ } = ۲ \text{ ن } ۱۱$$

$$(۲) \text{ ج } = - ۱ \text{ اور عہ } = ۱۱ (۲+۱)$$

$$(۳) \text{ ج } = ۱$$

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ان امثلہ میں جن کی جمع لوکارہی سلسلہ پر مبنی ہوتی  
 اکثر اوقات زادیہ کی خاص خاص قیمتوں کے لئے کوئی حاصل جمع  
 حاصل نہیں ہوتا۔

### صورت خاص

اگر ج = جم عہ جہاں عہ صفر اور  $\frac{11}{4}$  کے درمیان واقع ہے تو

$$ج = جم عہ جب عہ + \frac{1}{4} جم^۱ عہ جب عہ + \frac{1}{4} جم^۲ عہ جب عہ + \dots$$

اس صورت میں

$$ج = مس^۱ - \left( \frac{جم عہ جب عہ}{جم^۱ عہ} \right) \dots \dots \dots مساوات (۴) سے یعنی$$

$$= مس^۱ - (جم عہ)$$

$$= (عہ - \frac{11}{4}) \dots \dots \dots (زیر قیود مس در جہ دفعہ ۲۰)$$

$$= \frac{11}{4} - عہ$$

### امثلہ ۱

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

$$۱- جب عہ + ج جب عہ + (عہ + ۲) جب \frac{ج}{۲} + \dots \dots \dots تا لامتناہی$$

$$۲- جم عہ + ج جم (عہ + ۲) + \frac{ج}{۲} جم (عہ + ۲ + ۱) \dots \dots \dots تا لامتناہی$$

$$۳- ۱- جم عہ جم عہ + \frac{جم عہ}{۲} جم ۲ عہ - \frac{جم عہ}{۳} جم ۳ عہ + \dots \dots \dots تا لامتناہی$$

$$۴- جب عہ - \frac{جب (عہ + ۲ + ۱)}{۲} + \frac{جب (عہ + ۲ + ۱ + ۲)}{۳} \dots \dots \dots تا لامتناہی$$

$$۵- جم عہ - \frac{جم (عہ + ۲ + ۱)}{۲} + \frac{جم (عہ + ۲ + ۱ + ۲)}{۳} \dots \dots \dots تا لامتناہی$$

$$۶- ۱ + جز عہ + \frac{جز ۲ عہ}{۲} + \frac{جز ۳ عہ}{۳} + \dots \dots \dots تا لامتناہی$$

$$۷- \text{جیز ع} + \frac{\text{جیز ۲ ع}}{۱۱} + \frac{\text{جیز ۳ ع}}{۱۱} + \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۸- ۱ + \text{ویم ع} \text{جم (جب ع)} + \frac{۱}{۱۱} \text{ویم ع} \text{جم (۲ جب ع)} + \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۹- ۱ + \text{ویم ع} \text{جم (جم ع)} + \frac{\text{ویم ع} \text{جم (۲ جب ع)}}{۱۱} + \frac{\text{ویم ع} \text{جم (۳ جب ع)}}{۱۱} + \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۰- \frac{\text{جم ۵ ع}}{۱} + \frac{\text{جم ۳ ع}}{۱۱} + \frac{\text{جم ۵ ع}}{۱۱} + \dots \text{تالائیاں ہی}$$

ذیل کے اشل میں ج کو مثبت اور ایک سے کم فرض کیا جائے۔ اگر ج ایک کے برابر ہو تو دفعہ ۱۰۸ کے بموجب زاویہ ع کی بعض قیمتوں کے واسطے متضمت صورتیں پیدا ہوں گی۔

$$۱۱- \text{ج جب ع} - \frac{\text{ج}}{۴} \text{جب ۲ ع} + \frac{\text{ج}}{۴} \text{جب ۳ ع} - \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۲- \text{ج جب ع} + \frac{۱}{۱۱} \text{ج جب ۳ ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جب ۵ ع} + \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۳- \text{ج جم ع} + \frac{۱}{۴} \text{ج جم ۳ ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جم ۵ ع} + \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۴- \text{ج جم ع} - \frac{۱}{۴} \text{ج جم ۳ ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جم ۵ ع} - \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۵- \text{ج جب ع} - \frac{۱}{۴} \text{ج جب ۳ ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جب ۵ ع} - \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۶- \text{جم ع} - \frac{۱}{۴} \text{جم ۳ ع} + \frac{۱}{۵} \text{جم ۵ ع} - \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۷- \text{ج بم ع} - \frac{۱}{۴} \text{ج بم ۲ ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج بم ۳ ع} + \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۸- \text{ج جب ب ع} - \frac{۱}{۴} \text{ج جب ۲ ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جب ۳ ع} + \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۱۹- \text{ج جب ع} - \frac{۱}{۴} \text{ج جب ۲ ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جب ۳ ع} - \dots \text{تالائیاں ہی}$$

$$۲۰- \text{جیز ع} - \frac{۱}{۴} \text{جیز ۲ ع} + \frac{۱}{۵} \text{جیز ۳ ع} - \dots \text{تالائیاں ہی}$$

۲۱- دوہم جم بہ -  $\frac{1}{2}$  دوہم جم ۳ بہ +  $\frac{1}{6}$  و ۵ جم بہ - ..... سالانہ تباہی

۲۲- جم  $\frac{7}{3}$  +  $\frac{1}{3}$  جم  $\frac{7}{2}$  +  $\frac{1}{6}$  جم  $\frac{7}{3}$  +  $\frac{1}{2}$  جم  $\frac{7}{3}$  + ..... سالانہ تباہی

۲۳- اگر طہ - ۵ مس ۱ سے جب ۲ طہ - ۱ مس ۲ سے جب ۴ طہ

+  $\frac{1}{2}$  مس ۱ سے جب ۲ طہ - ..... سالانہ تباہی

تو ثابت کرو کہ مس ۵ = مس طہ جم ۵

۲۴- اگر طہ اور ذہ مثبت حادے زاوئے ہوں تو ثابت کرو کہ سلسلہ

جب طہ جم ذہ +  $\frac{1}{2}$  جب ۳ طہ جم ۲ ذہ +  $\frac{1}{6}$  جب ۵ طہ جم ۵ ذہ + ..... سالانہ تباہی

کا حاصل جمع  $\frac{7}{6}$  ہوگا۔ اگر طہ < ذہ، اور صفر ہوگا۔ اگر طہ > ذہ،  
ثابت کرو کہ

۲۵- مس لا +  $\frac{1}{2}$  مس لا +  $\frac{1}{6}$  مس لا + ..... سالانہ تباہی

= مس لا -  $\frac{1}{2}$  مس لا +  $\frac{1}{6}$  مس لا - ..... =

جہاں لا -  $\frac{7}{6}$  اور لا +  $\frac{7}{6}$  کے درمیان واقع ہے

۲۶- ۲ جب طہ +  $\frac{1}{4}$  ۴ جب طہ +  $\frac{1}{6}$  ۸ جب طہ + ..... =

= { مس طہ +  $\frac{1}{2}$  مس طہ +  $\frac{1}{6}$  مس طہ + ..... }

جہاں طہ -  $\frac{7}{6}$  اور لا +  $\frac{7}{6}$  کے درمیان واقع ہے۔

۲۷- جب طہ +  $\frac{1}{2}$  جب طہ +  $\frac{1}{6}$  جب طہ + ..... =

= ۲ (جب طہ -  $\frac{1}{2}$  جب ۳ طہ +  $\frac{1}{6}$  جب ۵ طہ - ..... =

جہاں طہ  $\neq (1 + 2) \frac{7}{6}$

۱۰۹- اب ہم چند ایسے سلسلوں کی مثالیں درج کرتے ہیں جو نہ تو

مندرجہ بالا الجواب میں سے کسی کے تحت میں آتے ہیں اور نہ باب ۱۹ حصہ اول کے تحت میں۔ ایسی صورتوں میں بالعموم یہ طریقہ کار گر ہو گا کہ ہر ایک رقم کو توڑ کر اسکو دو اور رقوم کے فرق کی شکل میں لکھ لیا جائے۔ اس عمل کے لئے بعض اوقات بڑی فراست کی ضرورت ہوتی ہے لیکن اگر جواب معلوم ہو تو اس کی مدد سے جمع کرنے کا طریقہ نسبتاً آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ جواب میں ن کی بجائے ایک لکھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ پہلی رقم کو کس شکل میں لکھنا چاہیئے۔

مشق ۱۔ سلسلہ

$$\text{جب } ۲ \text{ طے} + ۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} + ۴ \text{ جب } ۴ \text{ طے} + \dots$$

کو ن رقوم تک جمع کرو۔

چونکہ ہمیشہ جب ۳ ذ = ۳ جب ذ - ۳ جب ذ

$$\therefore \text{جب } ۲ \text{ طے} = \frac{۱}{۳} \times (۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \text{ جب } ۲ \text{ طے})$$

$$۳ \times \text{جب } ۲ \text{ طے} = \frac{۱}{۳} \times (۳ \times (۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \text{ جب } ۲ \text{ طے})) = \frac{۱}{۳} [۳ \times (۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \text{ جب } ۲ \text{ طے})]$$

$$۳ \times \text{جب } ۲ \text{ طے} = \frac{۱}{۳} [۳ \times (۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \text{ جب } ۲ \text{ طے})]$$

$$۳ \text{ (ن-۱) جب } ۲ \text{ طے} = \frac{۱}{۳} [۳ \text{ (ن جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \text{ (ن-۱) جب } ۲ \text{ طے})]$$

پس جمع کرنے سے مطلوبہ حاصل جمع

$$= \frac{۱}{۳} [۳ \text{ (ن جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \text{ (ن-۱) جب } ۲ \text{ طے})]$$

یہ لاتنا ہی تک حاصل جمع

$$= \frac{۱}{۳} [۳ \text{ (ن-۱) جب } ۲ \text{ طے} - ۳ \text{ (ن-۲) جب } ۲ \text{ طے}] \dots \dots \dots \text{حصہ اول دفعہ ۳۳}$$





$$= \text{مس} [\text{عہ} + \text{رہ}] - \text{مس} [\text{عہ} + (\text{ر} - ۱) \text{ہ}] \dots\dots\dots \text{وقفہ ۹۸ حصہ اول}$$

پس رکوباً ترتیب '۱' '۲' ..... ن قیمتیں دینے سے

$$(۱ + ی) \text{مس} \text{ہ} = \text{مس} (\text{عہ} + \text{ہ}) - \text{مس} \text{عہ}$$

$$(۱ + ی) \text{مس} \text{ہ} = \text{مس} (\text{عہ} + ۲ \text{ہ}) - \text{مس} (\text{عہ} + \text{ہ})$$

.....

$$(۱ + ی) \text{مس} \text{ہ} = \text{مس} (\text{عہ} + \text{ن} \text{ہ}) - \text{مس} \{ \text{عہ} + (\text{ن} - ۱) \text{ہ} \}$$

جمع کرنے سے

$$(\text{ن} + ج) \text{مس} \text{ہ} = \text{مس} (\text{عہ} + \text{ن} \text{ہ}) - \text{مس} \text{عہ}$$

$$\text{پس ج} = \frac{\text{مس} (\text{عہ} + \text{ن} \text{ہ}) - \text{مس} \text{عہ} - \text{ن} \text{مس} \text{ہ}}{\text{مس} \text{ہ}}$$

## امثلہ ۱۸

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

$$۱ - \text{قم} \text{طہ} + \text{قم} ۲ \text{طہ} + \text{قم} ۳ \text{طہ} + \dots\dots\dots \text{تا} \text{ن} \text{رقوم}$$

$$۲ - \text{قم} \text{طہ} \text{قم} ۲ \text{طہ} + \text{قم} ۲ \text{طہ} \text{قم} ۳ \text{طہ} + \text{قم} ۳ \text{طہ} \text{قم} ۴ \text{طہ} + \dots\dots\dots \text{تا} \text{ن} \text{رقوم}$$

$$۳ - \text{قط} \text{طہ} \text{قط} ۲ \text{طہ} + \text{قط} ۲ \text{طہ} \text{قط} ۳ \text{طہ} + \text{قط} ۳ \text{طہ} \text{قط} ۴ \text{طہ} + \dots\dots\dots \text{تا} \text{ن} \text{رقوم}$$

$$۴ - \text{قط} \text{طہ} \text{قط} (\text{طہ} + \text{فہ}) + \text{قط} (\text{طہ} + \text{فہ}) \text{قط} (\text{طہ} + \text{فہ}) + \text{قط} (\text{طہ} + \text{فہ}) \text{قط} (\text{طہ} + \text{فہ}) + \dots\dots\dots$$

$$+ \dots\dots\dots \text{تا} \text{ن} \text{رقوم}$$

$$۵ - \text{جم} \text{عہ} + \text{جم} ۳ \text{عہ} + \frac{۱}{\text{جم} \text{عہ} + \text{جم} ۵ \text{عہ}} + \frac{۱}{\text{جم} \text{عہ} + \text{جم} ۷ \text{عہ}} + \dots\dots\dots \text{تا} \text{ن} \text{رقوم}$$

$$۶ - \text{مس} \text{طہ} + \frac{۱}{\text{مس} \text{طہ}} + \frac{۱}{\text{مس} \text{طہ}} + \frac{۱}{\text{مس} \text{طہ}} + \dots\dots\dots \text{تالا تا} \text{ن} \text{ہی}$$

$$۷- سزط + \frac{۱}{۴} سزط + \frac{۱}{۲} سزط + \frac{۱}{۳} سزط + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۸- مس ط ق ط + مس ۲ ط ق ط + مس ۴ ط ق ط + مس ۸ ط ق ط + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۹- مس ط ق ط + مس \frac{۱}{۲} ق ط + مس \frac{۱}{۳} ق ط + \dots \dots \dots \text{ن رقوم}$$

تک اور نیز لاتنا ہی تک

$$۱۰- ۲ جم ط + \frac{۱}{۲} جم ط جم ط + \frac{۱}{۲} جم ط جم ط + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۱- جب ۲ جم ط - \frac{۱}{۲} جب ۴ جم ط + \frac{۱}{۲} جب ۸ جم ط - \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۲- جب ۲ ط جب ۴ ط + \frac{۱}{۲} جب ۴ ط جب ۲ ط + \frac{۱}{۲} جب ۸ ط جب ۴ ط + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۳- \frac{جب ط}{جم ط + جم ۲ ط} + \frac{جب ۲ ط}{جم ط + جم ۴ ط} + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۴- مس ۸ عس ۲ ع + \frac{۱}{۲} مس ۴ عس ۲ ع + \frac{۱}{۲} مس ۸ عس ۲ ع + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۵- جم ۳ ط - \frac{۱}{۳} جم ۳ ط + \frac{۱}{۳} جم ۳ ط - \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۶- جب ۳ ط + جب ۳ ط + جب ۳ ط + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۷- \frac{۱}{مم ط - مس ۳ ط} + \frac{۳}{مم ۳ ط - مس ۳ ط} + \frac{۳}{مم ۳ ط - مس ۳ ط} + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۸- \frac{جم ط - جم ۳ ط}{جب ۳ ط} + \frac{جم ۳ ط - جم ۳ ط}{جب ۳ ط} + \frac{جم ۳ ط - جم ۳ ط}{جب ۳ ط} + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۹- سن ۱ سن ۱ + \frac{۳}{۴ \times ۳ + ۱} سن ۱ + \frac{۶}{۹ \times ۸ + ۱} سن ۱ + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$

$$۲۰- سن ۱ سن ۱ + سن ۱ سن ۱ + سن ۱ سن ۱ + \dots \dots \dots \text{تان رقوم}$$



$$= -\frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 2 - \dots$$

$$[ \dots + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1 ] r =$$

دفعہ ۹۰ کی رو سے لوگ (۱-۱۰ وخط) کی مندرجہ بالا تفصیل بالعموم

اُس صورت میں درست اور جائز ہوگی اگر۔ در خطہ کو مقیاس ایک سے

کم ہو اور چونکہ  $l$  و  $x$  خط =  $\{ \text{حجم} (n + 1) + \text{خزجیب} (n + 1) \}$

اس لئے اس کا مقیاس ہے۔

اس لئے بالعموم مندرجہ بالا تفصیل اس صورت میں درست ہوگی جب

وہا سے کم ہو۔

اگر ایک کے سوا ہی جو تو بھی مندرجہ بالا تفصیل درست رہے گی

بیشتر طریقہ ط، ۴ کے کسی جفت صنف کے مساوی ہی نہ ہو

نیز اگر ۱۔ کے برابر ہو اور ۲ کے کسی طاق صنف کے مساوی

نہ ہو تو بھی تفصیل بالا درست رہے گی۔

۱۱۱- عشق -

$$\frac{y-1}{y+1}$$

کو اکی سعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ

نظا ہر ہے کہ

$$\frac{2-2 + 1}{2-1} = \frac{1}{2-1}$$

$$\frac{(x^2 - 2 + x^2) \cdot 1 - 1}{1 + (x^2 - 2 + x^2) \cdot 1 - 1} + 1 =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 - 2)(1 - 2 + 2 - 2)}{(1 - 1)(1 - 1)} + 1 - 2 = \\
& \frac{1}{1 - 1} + \frac{1}{1 - 1} + 1 - 2 = \\
& 1 - 2 + (1 - 1)(1 - 2) + 1 - 2 = \\
& 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + \dots = \\
& 1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + \dots = \\
& 1 + 1 = (1 - 2 + 2 - 2) + (1 - 2 + 2 - 2) + \dots = \\
& 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + \dots = \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}
\end{aligned}$$

(۱-۱) (۱-۲) اور (۱-۱) (۱-۲) کی تفصیلیں مسئلہ ثنائی کی مدد سے  
 اسی صورت میں درست ہونگی جبکہ ۱ و ۲ کا مقیاس ایک سے کم ہو  
 یعنی جب ۱ تعداداً ایک سے کم ہو لیکن اس کے سوائے اور کسی صورت  
 میں درست نہ ہونگی (دفعہ ۲۶)

یاد رہے کہ سلسلہ بالا ہی ہے جو دفعہ ۴۹ میں بلا ثبوت تسلیم کر لیا  
 گیا تھا۔ اسی طرح سے ہم دفعہ ۴۸ کا سلسلہ بھی معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2 + 2 - 2} = \frac{1}{1 - 1} = 1 \\
& \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2 + 2 - 2} = \frac{1}{1 - 1} = 1 \\
& \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2 + 2 - 2} = \frac{1}{1 - 1} = 1
\end{aligned}$$

$$\left[ \frac{1}{1 - 2} - \frac{1}{1 - 2 + 2 - 2} \right] \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2} = 1$$

$$\left\{ \frac{1}{1 - 2} - \frac{1}{1 - 2 + 2 - 2} \right\} \frac{1}{1 - 2} = 1$$

$$= ۲ \text{ جب ط } + ۲ \text{ جب لا } + ۲ \text{ جب م } + ۲ \text{ جب ن } + \dots \dots \dots \text{ سالا تنہا ہی}$$

جب سابق یہ تفصیل بھی اسی صورت میں جائز ہوگی جب  $۱ > ۱$

$$۱۱۲ = \text{مشق} - \text{اگر جب لا} = \text{ن جب (ع + لا)} \text{ تو لا کو ن کی صعودی}$$

قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ جہاں ن ایک سے کم ہے۔

$$\text{چونکہ جب لا} = \text{ن جب (ع + لا)} = \text{ن} \{ \text{جب ع جم لا} + \text{جم ع جب لا} \}$$

$$\therefore \text{مس لا} = \frac{\text{ن جب ع}}{\text{۱ - ن جم ع}}$$

$$\therefore \frac{\text{و لا} - \text{و لا} - \text{و لا}}{\text{و لا} + \text{و لا} - \text{و لا}} = \frac{\text{ن خ جب ع}}{\text{۱ - ن جم ع}}$$

$$\therefore \frac{\text{و لا}}{\text{و لا} - \text{و لا}} = \frac{\text{۱ - ن جم ع} + \text{ن خ جب ع}}{\text{۱ - ن جم ع} - \text{ن خ جب ع}} = \frac{\text{۱ - ن و لا}}{\text{۱ - ن و لا}}$$

$$\therefore ۲ \text{ خ لا} = \text{لوک (۱ - ن و لا)} - \text{لوک (۱ - ن و لا)}$$

$$= \text{ن و لا} - \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۲ \text{ و لا} - \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۲ \text{ و لا} - \dots$$

$$+ \text{ن و لا} + \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۲ \text{ و لا} + \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۲ \text{ و لا} + \dots$$

$$= \text{ن (و لا - و لا)} + \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۲ \text{ (و لا - و لا)}$$

$$+ \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۳ \text{ (و لا - و لا)} \dots \dots \dots \text{ سالا تنہا ہی}$$

$$= \text{ن} \times ۲ \text{ خ جب ع} + \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۲ \times ۲ \text{ خ جب ع} + \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۳ \times ۲ \text{ خ جب ع} + \dots$$

$$\therefore \text{لا} = \text{ن جب ع} + \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۲ \text{ جب ع} + \frac{۱}{۲} \text{ ن}^۳ \text{ جب ع} + \dots \dots \dots (۱)$$

اس مساوات میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ لا -  $\frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۱}{۲}$  کے

درمیان واقع ہے۔ اگر ایسا نہ ہو تو ہم کو چاہئے کہ ۲ خ لا کی بجائے  
 ۲ ک خ ۲ + ۲ خ لا لکھیں، تب مساوات (۱) کے دائیں جانب  
 کارکن لا + ک ۲ ہو جائیگا۔ بعد ازیں ہم ک کے لئے اسی قیمت  
 تجویز کر سکتے ہیں جس سے لا + ک ۲ = ۲ اور ۲ + ۲ کے درمیان  
 واقع ہو۔

حسب سابق یہ تفصیلات اسی صورت میں درست ہونگی جبکہ  
 ن ایک سے کم ہو۔  
 ۱۱۳۔ مشق۔ دو لا جمب لا کو لا کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ  
 میں پھیلاؤ۔

نظا ہر ہے کہ

$$\text{دو لا جمب لا} = \frac{\text{دو لا جو ب خ لا} + \text{دو ب خ لا}}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ دو } (۱ + \text{خ ب}) + \frac{۱}{۲} \text{ دو } (۱ - \text{خ ب})$$

$$= \frac{۱}{۲} [۱ + (۱ + \text{خ ب}) لا + \frac{(۱ + \text{خ ب}) لا^۲}{۲} + \frac{(۱ + \text{خ ب}) لا^۳}{۳} + \dots]$$

$$+ \frac{۱}{۲} [۱ + (۱ - \text{خ ب}) لا + \frac{(۱ - \text{خ ب}) لا^۲}{۲} + \frac{(۱ - \text{خ ب}) لا^۳}{۳} + \dots]$$

$$\text{اس میں لا ن کا سر} = \frac{(۱ + \text{خ ب})^ن + (۱ - \text{خ ب})^ن}{۲}$$

اگر لا + خ ب = ر (جم عم + خ جب عم)

یعنی ر = ۱ + لا + ب اور مس عم =  $\frac{۱}{۲}$  (زیر شرط اظ دفعہ ۲۰)

تب لا کاسر = { (جم + خ جب عم) } + { (جم عم - خ جب عم) } + {

۲  
مثلاً ڈی مائیرے کی رو سے = ر  $\frac{\text{جم عم}}{\text{ان}}$   
بہذا

$$\text{فولہ } \frac{\text{جم ب لا}}{\text{لا}} = ۱ + \text{رجم عم} \times \text{لا} + \frac{\text{ر}^2 \text{جم}^2 \text{عم}}{\text{لا}^2} + \frac{\text{لا}^2 \text{جم}^2 \text{عم}^2}{\text{لا}^3}$$

$$+ \dots + \frac{\text{لا}^2 \text{جم}^2 \text{عم}^2}{\text{لا}^3} + \dots$$

$$\text{جہاں } ر = ۱ + \frac{\text{لا}^2 \text{جم}^2 \text{عم}^2}{\text{لا}^3} \text{ اور مس عم} = \frac{\text{لا}^2 \text{جم}^2 \text{عم}^2}{\text{لا}^3}$$

تفصیل 'ب' اور 'لا' کی تمام قیمتوں کے واسطے درست ہے... (دفعہ ۵۷)

## امثلہ ۱۹

رقوم ذیل کو لامتناہی سلسلوں میں پھیلاؤ

$$(۱) \frac{۱ + \text{جم ط}}{\text{لا} + \text{جم ط} + ۱} \quad (۲) \frac{\text{جم ط} - \text{لاجم ط}}{\text{لا} - ۱ + \text{جم ط} + ۱}$$

$$(۳) \frac{\text{جم ط} - \text{لاجم ط}}{\text{لا} - ۱ + \text{جم ط} + ۱} \quad (۴) \frac{\text{جم ط} - \text{لاجم ط}}{\text{لا} - ۱ + \text{جم ط} + ۱}$$

$$(۵) \frac{\text{جم ط} - \text{لاجم ط}}{\text{لا} - ۱ + \text{جم ط} + ۱}$$

ثابت کرو کہ

$$(۶) \frac{\text{لا}}{\text{لاجم ط} + \text{لاجم ط} + ۱}$$

$$= \left[ \text{جم ط} - \frac{۱}{\text{لا}} + \text{جم ط} - \frac{۱}{\text{لا}} + \dots \right] \text{ جہاں ج} = \frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا}}$$



$$(۷) \text{ مس } ۱ = \frac{\text{اجب ط}}{۱ - \text{اجم ط}} = \text{اجب ط} + \frac{۱}{۲} \text{اجب ط} + \frac{۱}{۴} \text{اجب ط} + \frac{۱}{۸} \text{اجب ط} + \dots \text{ تا لامتناہی}$$

$$(۸) \frac{۱}{۲} \text{ مس } ۱ = \text{اجب ط} + \frac{۱}{۲} \text{ مس } ۱ = \text{اجب ط} + \frac{۱}{۲} \text{ مس } ۱ + \frac{۱}{۴} \text{اجب ط} + \frac{۱}{۸} \text{اجب ط} + \dots \text{ تا لامتناہی}$$

$$(۹) \text{ اگر جب ط} = \text{اجم (ط} + \text{ع)} \text{ تو ط کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔}$$

$$(۱۰) \text{ اگر } ۲ \text{ مس } ۱ = \text{جب لا} \text{ قم } \frac{\text{لا} + \text{ع}}{۲} \text{ قم } \frac{\text{لا} - \text{ع}}{۲} \text{ تو}$$

ما کو اجم ع کی رقوم میں پھیلاؤ

$$(۱۱) \text{ اگر مس لا} = \text{ن مس ما اور } \frac{۱ - \text{ن}}{۱ + \text{ن}} = \text{م} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لا} + \text{ر} = ۳ - \text{ما} - \text{م جب } ۲ + \frac{۱}{۲} \text{جب } ۲ - \frac{۱}{۲} \text{جب } ۲ + \frac{۱}{۴} \text{جب } ۲ - \frac{۱}{۴} \text{جب } ۲ + \frac{۱}{۸} \text{جب } ۲ - \frac{۱}{۸} \text{جب } ۲ + \dots \text{ تا لامتناہی}$$

چان ر کے لئے ایسی قیمت تجویز کرنی چاہیئے جس سے لا + ر - ۳ - ما کی قیمت

$$= \frac{۳}{۲} \text{ اور } \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{ کے درمیان واقع ہو۔}$$

$$(۱۲) \text{ اگر } (۱) \text{ ن} = \text{اجم ع اور}$$

$$(۲) \text{ ن} = \frac{۱}{\text{اجم ع}}$$

تو دونوں صورتوں میں مشتق ماقبل کا سلسلہ کون سی شکل اختیار کرتا ہے۔

$$(۱۳) \text{ لو کہ جم } \left( \frac{۳}{۲} + \text{ط} \right) \text{ کو ط کے صعودی اضعات کی جیب اور جیب التمام}$$

کے رقوم میں پھیلاؤ۔

$$(۱۴) \text{ لو کہ مس } \left( \frac{۳}{۲} + \text{ط} \right) \text{ کو ط کے صعودی اضعات کی جیب کی رقوم}$$

میں پھیلاؤ۔

$$(۱۵) \text{ ثابت کرو کہ}$$



# باب نہم

اجزاء ضربی میں تحلیل کرنا اور جب طہ اور جم طہ کے لئے

لامتناہی حاصل ضرب

۱۱۴۔ ہم الجبر میں یہ معلوم کر چکے ہیں کہ اگر ف سے لا کا کوئی تفاعل مراد ہو اور اگر یہ جملہ لا کی بجائے عد رکھنے سے صفر ہو جائے تو لا۔ عد ف کا ایک جزو ضربی ہوتا ہے۔

لہذا ثابت ہوا کہ کسی جملہ ف کے اجزاء ضربی معلوم کرنے کے لئے پہلے میں مساوات ف = کو حل کرنا چاہیے۔

نیز ہمیں معلوم ہے کہ اگر ف = ن دیں درجہ کی مساوات ہو تو اس مساوات کے ن حل ہونگے۔ اور اگر یہ قیمتیں جو مساوات مذکورہ کو حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں 'عد' بہ 'جم' ..... نہ ہوں تو جملہ ف کے اجزاء ضربی لا۔ عد، لا۔ بہ، لا۔ جم، ..... لا۔ نہ ہونگے اور

ان کے علاوہ اور کوئی جزو ضربی ایسا نہ ہوگا جس میں لا شامل ہو۔  
دفعات مابعد میں اجزاء ضربی معلوم کرنے کے لئے ہم یہی طریقہ اختیار کریں گے۔

۱۱۵۔ جملہ لا۔ عد، لا۔ جم ن طہ + ۱

کو اس کے اجزاء ضربی میں تحلیل کرو۔

ہیں پہلے مساوات

$$\text{لا}^۲ - ۲ \text{ لا}^۲ \text{ جم}^۲ \text{ ط}^۲ + ۱ = ۰$$

کو حل کرنا چاہیے

مساوات بالا اس طرح لکھی جاسکتی ہے لا<sup>۲</sup> - ۲ لا<sup>۲</sup> جم<sup>۲</sup> ط<sup>۲</sup> + جم<sup>۲</sup> ن<sup>۲</sup> ط<sup>۲</sup> = ۰ - جب<sup>۲</sup> ن<sup>۲</sup> ط<sup>۲</sup>

یعنی لا<sup>۲</sup> - جم<sup>۲</sup> ط<sup>۲</sup> = ± ۱ - جب<sup>۲</sup> ن<sup>۲</sup> ط<sup>۲</sup>

اور اس لئے لا<sup>۲</sup> = [جم<sup>۲</sup> ن<sup>۲</sup> ط<sup>۲</sup> ± ۱ - جب<sup>۲</sup> ن<sup>۲</sup> ط<sup>۲</sup>]

دفعہ ۲۴ کی رو سے اس جملہ کی قیمتیں ذیل کی ۲ ن مقادیر ہیں -

$$\text{جم}^۲ \pm \text{خ} \text{ جب}^۲ \text{ ط}^۲ \text{ جم}^۲ \text{ (ط}^۲ + \frac{\pi^۲}{\text{ن}}) \pm \text{خ} \text{ جب}^۲ \text{ (ط}^۲ + \frac{\pi^۲}{\text{ن}})$$

$$\text{جم}^۲ \text{ (ط}^۲ + \frac{\pi^۲}{\text{ن}}) \pm \text{خ} \text{ جب}^۲ \text{ (ط}^۲ + \frac{\pi^۲}{\text{ن}}) \dots\dots$$

$$\dots\dots \text{جم}^۲ \text{ (ط}^۲ + \frac{\pi^۲(1-\text{ن})}{\text{ن}}) \pm \text{خ} \text{ جب}^۲ \text{ (ط}^۲ + \frac{\pi^۲(1-\text{ن})}{\text{ن}})$$

پہلے زوج سے ذیل کے دو اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں -

$$\text{لا}^۲ - \text{جم}^۲ \text{ ط}^۲ + \text{خ} \text{ جب}^۲ \text{ ط}^۲ \text{ اور لا}^۲ - \text{جم}^۲ \text{ ط}^۲ - \text{خ} \text{ جب}^۲ \text{ ط}^۲$$

یا اگر ان دونوں کو ضرب دیکر ایک جزو ضربی بنالیا جائے تو گویا اول

زوج کے متعلق درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

$$(\text{لا}^۲ - \text{جم}^۲ \text{ ط}^۲) + \text{خ} \text{ جب}^۲ \text{ ط}^۲$$

حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^۲ - ۲ \text{ لا}^۲ \text{ جم}^۲ \text{ ط}^۲ + ۱$$

اسی طرح سے مذکورہ بالا مقادیر کے دوسرے تیسرے

ازواج سے بالترتیب ذیل کے اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں -

$$\text{لا}^۲ - ۲ \text{ لا}^۲ \text{ جم}^۲ \text{ (ط}^۲ + \frac{\pi^۲}{\text{ن}}) + ۱$$

$$لا^۵۲ - ۲ لاجم (ط + \frac{\pi^2}{n}) + ۱$$

$$اور لا^۵۲ - ۲ لاجم (ط + \frac{\pi^2 - n^2}{n}) + ۱$$

نیز ان اجزاء ضربی کو ضرب دینے سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ لا<sup>۵۲</sup> کا سر ایک ہے اور اصلی جملہ میں بھی ۲ ن کا سر ایک ہی ہے۔ لہذا جملہ مذکور کو ان اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی کرنے میں موخر الذکر کے ساتھ کسی عددی جزو ضربی کے ثبت کرنے کی ضرورت نہیں۔

پس

$$لا^۵۲ - ۲ لاجم ن ط + ۱$$

$$= (لا^۵۲ - ۲ لاجم ط + ۱) (لا^۵۲ - ۲ لاجم (ط + \frac{\pi^2}{n}) + ۱) (لا^۵۲ - ۲ لاجم (ط + \frac{\pi^2 - n^2}{n}) + ۱) \dots \dots \dots (۱)$$

لا<sup>۵۲</sup> پر تقسیم کرنے سے

$$لا^۵۲ + \frac{۱}{لا^۵۲} - ۲ لاجم ط = \{ لا + \frac{۱}{لا} - ۲ لاجم ط \} \{ لا + \frac{۱}{لا} - ۲ لاجم (ط + \frac{\pi^2}{n}) \} \dots \dots \dots (۲)$$

رابطہ (۲) کو بطریقہ ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$لا^۵۲ + \frac{۱}{لا^۵۲} - ۲ لاجم ن ط = II_{ن-۱} \{ لا + \frac{۱}{لا} - ۲ لاجم (ط + \frac{\pi^2}{n}) \}$$

یہاں علامت II<sub>ن-۱</sub> سے مراد ان سب جملوں کا حاصل ضرب ہے جو اس کے بائیں

جانب کے جملہ میں ر کو بالتسلسل صفر سے لیکر ن - ۱ تک کے کل صحیح اعداد کے برابر رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{لا}^۲ - ۲ \text{لا}^۱ \text{جم}^۱ \text{ن} + ۱$$

$$= \{ \text{لا}^۲ - ۱ \text{جم}^۱ \text{ن} + ۱ \} \{ \text{لا}^۲ - ۲ \text{لا}^۱ \text{جم}^۱ \text{ن} + ۱ \} \{ \text{لا}^۲ - ۳ \text{لا}^۱ \text{جم}^۱ \text{ن} + ۱ \} \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \{ \text{لا}^۲ - ۲ \text{لا}^۱ \text{جم}^۱ \text{ن} + ۱ \} \dots \dots \dots (۳)$$

۱۱۶۔ دفعہ قبل کا مسئلہ مستقرا سے بھی ثابت ہو سکتا ہے۔ پہلے ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ

$$\text{لا}^۱ + \frac{۱}{۱} - ۲ \text{جم}^۱ \text{ن} =$$

$$\text{لا}^۱ + \frac{۱}{۱} - ۲ \text{جم}^۱ \text{ن} \text{ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔}$$

$$\text{اگر لا}^۱ + \frac{۱}{۱} - ۲ \text{جم}^۱ \text{ن کو فہ (ن) سے تعبیر کیا جائے}$$

$$\text{اور لا}^۱ + \frac{۱}{۱} - ۲ \text{جم}^۱ \text{ن کو لہ سے، تو گویا ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ فہ (ن)،}$$

لہ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

$$\text{مان لو کہ یہ مسئلہ فہ (ن-۱) اور فہ (ن-۲) کے لئے درست ہے۔}$$

$$\text{یعنی فہ (ن-۱) اور فہ (ن-۲) دونوں لہ پر پورے تقسیم ہو جاتے ہیں۔}$$

$$\left( \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} \right) \text{ فہ (ن-۱)} = \left( \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} \right) \left\{ \text{لا}^۱ - \frac{۱}{۱} + ۱ - ۲ \text{جم}^۱ \text{(ن-۱)} \right\}$$

$$= \left( \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} \right) + \left( \text{لا}^۱ - \frac{۱}{۱} + ۱ - ۲ \text{جم}^۱ \text{(ن-۱)} \right) \times \left( \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} \right) =$$

$$\left\{ \text{لا}^۱ + \frac{۱}{۱} - ۲ \text{جم}^۱ \text{ن} \right\} =$$

$$+ \left\{ \text{لا}^۱ - \frac{۱}{۱} + ۲ - ۲ \text{جم}^۱ \text{(ن-۲)} \right\} - ۲ \text{جم}^۱ \text{(ن-۱)} + \left\{ \text{لا}^۱ + \frac{۱}{۱} - ۲ \text{جم}^۱ \text{ن} \right\}$$

$$\text{کیونکہ } ۲ \text{جم}^۱ \text{ن} + ۲ \text{جم}^۱ \text{(ن-۲)} = ۲ \text{جم}^۱ \text{ن} \text{ جم}^۱ \text{(ن-۱)}$$



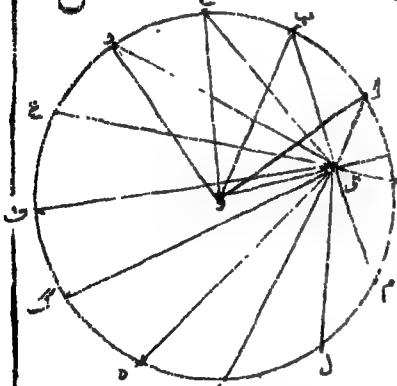
$$لا + \frac{1}{2} - ۲ - جم (ع + \frac{\pi}{6})$$

$$لا + \frac{1}{2} - ۲ - جم (ع + \frac{\pi}{6})$$

اور پر بھی پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔ اس سے دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۲) آسانی سے حاصل ہو جاتی ہے۔

۱۱۷۔ دائرہ کے متعلق ڈمی مائیرے کا مسئلہ  
دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۳) کو ہندسی معنی بھی پہنائے جاسکتے ہیں۔  
فرض کرو کہ ایک دائرہ کے اندر جس کام مرکز وہ ہے اور نصف قطر ہے  
ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ..... بنایا گیا ہے

$$پس \quad \angle اوب = \angle بوج = \angle جود = \dots = \frac{\pi}{n}$$



فرض کرو کہ دائرہ کے اندر یا باہر

ایک نقطہ ق ایسا ہے کہ

$$وق = لا اور \angle ق و ا = ط$$

$$\angle تب = \angle قوب = ط + \frac{\pi}{n}$$

$$\angle قوج = ط + \frac{\pi}{n}$$

$$اور بنا پرین ق و ا = وق + لا + ۲ - لا ۲ وق \times لا جم ق و ا$$

$$= لا - ۲ - لا جم ط + را$$

$$ق ب = وق + وق - ۲ - وق \times وب جم قوب$$

$$= لا - ۲ - لا جم (ط + \frac{\pi}{n}) + را$$

$$ق ج = لا - ۲ - لا جم (ط + \frac{\pi}{n}) + را$$



لہذا ق<sup>۱</sup> × ق<sup>۲</sup> ب<sup>۲</sup> ق<sup>۳</sup> ج<sup>۳</sup> × ..... ن اجزائے ضربی تک

$$= \{ \text{لا} - ۲ \text{ لاجم ط} + \text{ر} \} \{ \text{لا} - ۲ \text{ لاجم (ط} + \frac{\pi}{12} ) + \text{ر} \}$$

$$\{ \text{لا} - ۲ \text{ لاجم (ط} + \frac{\pi}{12} ) + \text{ر} \} \{ \text{لا} - ۲ \text{ لاجم ط} + \text{ر} \} \dots \dots \dots \text{ن اجزائے ضربی تک}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} - ۲ \text{ لاجم ن ط} + \text{ر}^{\text{ن}}$$

### ۱۱۸ - دائرہ کے متعلق کوئی کامثلہ

دفعہ ماقبل میں فرض کرو کہ نقطہ ق، دایرہ واقع ہے۔

یعنی فرض کرو کہ نقطہ ق، اُن خطوط میں سے جو دائرہ کے مرکز و  
کثیر الاضلاع کے رأسوں کے ساتھ ملاتے ہیں، کسی ایک پر واقع ہے

اس صورت میں ط = ۰ اور

$$\text{ق}^۱ \times \text{ق}^۲ \text{ ب}^۲ \times \text{ق}^۳ \text{ ج}^۳ \times \dots \dots \dots \text{ن اجزائے ضربی تک}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} - ۲ \text{ لاجم ن} + \text{ر}^{\text{ن}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ر}^{\text{ن}}$$

$$= \text{ق}^۱ \times \text{ق}^۲ \text{ ب}^۲ \times \text{ق}^۳ \text{ ج}^۳ \times \dots \dots \dots \text{ن اجزائے ضربی تک}$$

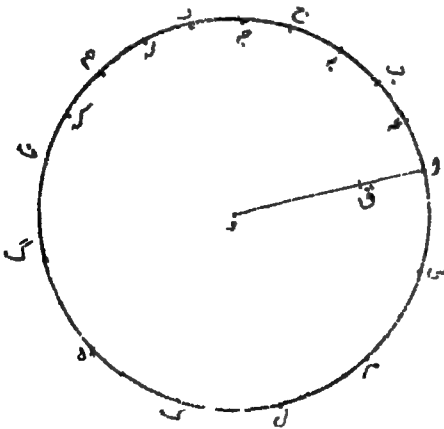
$$= \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ر}^{\text{ن}} \text{ یا } \text{ر}^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}}$$

پہلی قیمت اس صورت میں

درست ہوگی جب ق دائرہ

کے باہر وہ محدودہ پر واقع ہو یعنی جب لا کے ر، اور دوسری قیمت

اس صورت میں درست ہوگی، جبکہ نقطہ ق دائرہ کے اندر واقع ہو۔





مساوات مذکورہ سے لا-۱ = جم ۲۲ ر ۲ ± خ جب ۲۲ ر ۲ جہاں ر سے کوئی صحیح عدد مراد ہے۔

پس لا-۱ = [جم ۲۲ ر ۲ ± خ جب ۲۲ ر ۲]  $\frac{1}{2}$  ..... (۱)

صورت اول۔ فرض کرو کہ 'ن' جفت ہے  
بوجب دفعہ ۱۲۴ جلد (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} &\text{جم} \cdot \pm \text{خ جب} \cdot \text{جم} \frac{۲۲}{ن} \pm \text{خ جب} \frac{۲۲}{ن} \\ &\text{جم} \frac{۲۲}{ن} \pm \text{خ جب} \frac{۲۲}{ن} \dots \dots \text{جم} \frac{۲۲-ن}{ن} \pm \text{خ جب} \frac{۲۲-ن}{ن} \text{،} \\ &\text{جم} \frac{۲۲-ن}{ن} \pm \text{خ جب} \frac{۲۲-ن}{ن} \text{،} \end{aligned}$$

لیکن جم ۰ ± خ جب ۰ = ۱

اور جم  $\frac{۲۲-ن}{ن} \pm \text{خ جب} \frac{۲۲-ن}{ن} = ۱$

لہذا اس صورت میں مساوات (۱) کی اصلیں ذیل کی ن مقادیر ہیں

$$\pm ۱ \text{، جم} \frac{۲۲}{ن} \pm \text{خ جب} \frac{۲۲}{ن} \text{، جم} \frac{۲۲-ن}{ن} \pm \text{خ جب} \frac{۲۲-ن}{ن}$$

$$\dots \dots \dots \text{جم} \frac{۲۲-ن}{ن} \pm \text{خ جب} \frac{۲۲-ن}{ن}$$

پہلے زوج کے متعلق اجزائے ضربی لا-۱ اور لا-۱+ ہیں جو دونوں

مکرر درجہ دوم کے ایک جزو ضربی لا-۱ کے مساوی ہیں۔

دوسرے زوج کے متعلق اجزائے ضربی لا-۱ جم  $\frac{۲۲}{ن}$  - خ جب  $\frac{۲۲}{ن}$

اور لا-۱ جم  $\frac{۲۲-ن}{ن}$  + خ جب  $\frac{۲۲-ن}{ن}$  ہیں یعنی اس زوج سے متعلق

جزو ضربی درجہ دوم لا۔۲ لا جم  $\frac{n^2}{n} + ۱$  ہے۔  
اس طرح ہمیں درجہ دوم کے اجزائے ضربی کے پ ن زوج حاصل  
ہوتے ہیں۔

اگر ان سب کو ضرب دیا جائے تو لا۔۱ کا سر ایک ہوگا، اسلئے ہمیں  
اس حاصل ضرب کے ساتھ کوئی عددی تھرا لگانے کی ضرورت نہیں۔  
لہذا بالآخر ثابت ہوا کہ اگر ن جفت ہو تو

$$\text{لا۔۱} = (۱ - \text{لا۔۲}) (۲ - \text{لا جم } \frac{n^2}{n} + ۱) (\text{لا۔۲} - \text{لا جم } \frac{n^2}{n} + ۱) \dots \dots \dots (۲)$$

صورت دوم۔ فرض کر دو کہ ن طاق ہے۔  
تب حسب دفعہ ۲۴ جملہ (۱۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \text{جم۔} &= \text{خ جب } \frac{n^2}{n} \quad ، \quad \text{جم } \frac{n^2}{n} = \text{خ جب } \frac{n^2}{n} \\ \text{جم } \frac{n^2}{n} &= \text{خ جب } \frac{n^2}{n} \quad \dots \dots \dots \text{جم } \frac{n^2}{n} = \text{خ جب } \frac{n^2}{n} \\ \text{جم } \frac{n^2}{n} &= \text{خ جب } \frac{n^2}{n} \end{aligned}$$

پہلے زوج سے صرف ایک ہی قیمت ۱ حاصل ہوتی ہے  
حسب سابق باقی زوجوں کو لینے سے جب ن طاق ہو تو

$$\text{لا۔۱} = (۱ - \text{لا۔۲}) \{ \text{لا۔۲} - \text{لا جم } \frac{n^2}{n} + ۱ \} \{ ۱ + \text{لا جم } \frac{n^2}{n} + ۱ \} \dots \dots \dots (۳)$$

اختصاراً اگر ن جفت ہو تو



اور لا - جم  $\frac{n}{n}$  + خر جب  $\frac{n}{n}$   
ہیں جو دونوں ملکر درجہ دوم کے ایک جزو ضربی  
لا - ۲ لا جم  $\frac{n}{n}$  + ۱ کے مساوی ہیں۔

اسی طرح دوسرے زوج کے متعلق درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

$$\text{لا} - ۲ \text{ لا جم } \frac{n}{n} + ۱$$

ہے علیٰ ہذا قیاس، لہذا حسب ذیل ماقبل جب ن جفت ہو تو

$$\text{لا} + ۱ = (\text{لا} - ۲ \text{ لا جم } \frac{n}{n} + ۱) (\text{لا} - ۲ \text{ لا جم } \frac{n}{n} + ۱)$$

$$\dots\dots\dots [\text{لا} - ۲ \text{ لا جم } \frac{n}{n} (۱ - ۱) + ۱]$$

صورت دوم - فرض کرو کہ ن طاق ہے۔

اس صورت میں جملہ ۱ کی قیمتیں حسب ذیل ہوں گی۔

$$\text{جم } \frac{n}{n} \pm \text{خر جب } \frac{n}{n} ، \text{ جم } \frac{n}{n} \pm \text{خر جب } \frac{n}{n} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \text{جم } \frac{n}{n} (۲ - ۱) \pm \text{خر جب } \frac{n}{n} (۱ - ۱) \pm \text{جم } \frac{n}{n} \pm \text{خر جب } \frac{n}{n}$$

آخری زوج سے صرف ایک قیمت - ۱ حاصل ہوتی ہے پس  
مطلوبہ اجزائے ضربی میں سے لا + ۱ ایک جزو ضربی  
ہے۔

دیگر مندرجہ بالا قیمتوں کے مسلسل ازدواج کے متعلق درجہ دوم کے  
اجزائے ضربی حسب ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} & \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} + ۱ \quad \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} + ۱ + \dots \\ & \dots \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi(۲-n)}{n} + ۱ \end{aligned}$$

ہذا بالآخر جب ن طاق ہو تو

$$\begin{aligned} & \text{لا}^2 + ۱ = (۱ + \text{لا}) (۱ + \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n}) (۱ + \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n}) \dots \\ & \dots [۱ + \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi(۲-n)}{n} + ۱] \end{aligned}$$

اختصاراً اگر جفت ہو تو

$$\text{لا}^2 + ۱ = \prod_{r=1}^{n/2} (۱ + \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{r\pi}{n})$$

اور اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^2 + ۱ = (۱ + \text{لا}) \prod_{r=1}^{(n-1)/2} (۱ + \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{r\pi}{n})$$

یہ ضوابط دفعہ ۱۱۵ کے اساسی ضابطہ میں ن طہ کی بجائے  $\frac{n}{2}$  لکھنے سے بھی آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۲۱۔ مشتق ۱۔ مقادیر جم ن نہ۔ جم ن طہ اور جمن نہ۔ جمن طہ کو

ن اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھو۔

دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۲) میں  $\omega = \omega^2$  و  $\omega^2 = \omega$

پس  $\text{لا}^2 = ۱ = \omega - \omega^2$  اعلیٰ

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \omega + \omega^2 = \omega^2 + \omega = ۲ \text{ جم} ۲$$











نظر ہو تو ثابت کرو کہ

$$و_۱ \times و_۲ \times و_۳ \dots \dots \dots و_n = ر_n$$

۲۸۔ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع  $و_۱$  .....  $و_n$  ہے۔ اس کے گرد ایک بیرونی دائرہ کھینچا گیا ہے جو اس کے سب باشوں میں سے گزرتا ہے۔ اور ایک اندرونی دائرہ کھینچا گیا ہے جو اندر کی طرف سے اس کے سب اضلاع کو مس کرتا ہے کثیر الاضلاع کے مرکز  $و$  میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو اندرونی دائرہ سے  $ق$  پر اور بیرونی دائرہ سے  $ق_۱$  پر ملتا ہے۔ اگر  $ق$  اور  $ق_۱$  دونوں میں سے اضلاع پر عمود کھائے جائیں تو ثابت کرو کہ  $ق$  میں سے گزرنے والے عمودوں کے حاصل ضرب کو  $ق$  میں سے گزرنے والے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ نسبت

$$جمن : ۱$$

ہوگی جہاں  $ط$  وہ زاویہ ہے جو خطوط  $وق$  اور  $و_۱$  کے درمیان بنتا ہے۔  
۲۹۔ ایک دائرہ کا نصف قطر  $و$  ہے اور مرکز  $و$  دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع  $ا ب ج د$  ..... بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر  $ق$  کوئی نقطہ ہو تو

$$ق ا \times ق ب \times ق ج \times \dots \dots \dots ق_n = ر_n - ۲ و_n ر_n جمن ط + و_n$$

جہاں  $ر$  سے مراد  $وق$  کا طول ہے اور  $ط$  سے مراد زاویہ  $ق و ا$  ہے

نیز ثابت کرو کہ اُن زاویوں کا مجموعہ جو  $ا ق$ ،  $ب ق$ ،  $ج ق$  .....

بالترتیب  $و ا$ ،  $و ب$ ،  $و ج$ ، ..... مدورہ کے ساتھ بنتے ہیں

$$مس = \frac{ر_n جمن ط}{ر_n جمن ط - و_n}$$

جب طہ اور جم طہ کی تحلیل اجزائے ضروری میں

۱۲۲۔ جب طہ کو اجزائے ضربی کے ایک لانتناہی سلسلہ کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرو

ہمیں معلوم ہے کہ جب طہ = ۲ جب طہ = ۲ جب طہ = ۲

٢٠٠ جيب  $\frac{\pi}{4}$  جيب  $(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$  ..... (١١)

اسی طرح سے مساوات (۱) میں  $\frac{1}{p}$  کو بالترتیب  $\frac{1}{p}$  اور  $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$

میں نے

$$\text{جب } \frac{p}{q} = 2 \text{ جب } \frac{p}{q} = \left(\frac{3}{2} + \frac{p}{q}\right) = 2 \text{ جب } \frac{p}{q} = \left(\frac{3}{2} - \frac{p}{q}\right)$$

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2 \text{ جیب } \left( \frac{\frac{1}{2} \pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \right) \text{ جیب } \left( \frac{\frac{1}{2} \pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \right)$$

مسادات (۱) کی بائیں جانب قیمتیں مندرج کر کے رقم کو ترتیب وار لکھئے۔

$$\text{جیب } ۲ = \text{جیب } \frac{\pi}{۲} \times \text{جیب } \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} \times \text{جیب } \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} \times \text{جیب } \frac{\pi}{۲} + \dots (۳)$$

ایک مرتبہ اور مساوات (۲) کے بائیں جانب بھی عمل کریں اور

رقوم محمد کو ترتیب وار لکھنے سے

$$\text{جیب } 72^\circ = \frac{4}{5} \quad \text{جیب } 75^\circ = \frac{3}{4} \quad \text{جیب } 78^\circ = \frac{3}{4} \quad \text{جیب } 81^\circ = \frac{4}{5} \quad \text{جیب } 84^\circ = \frac{3}{4}$$

$$x \text{ جب } \frac{\pi+2}{2} \text{ جب } \frac{\pi+3}{2} \text{ جب } \frac{\pi+4}{2} \text{ جب } \frac{\pi+5}{2} \dots (3)$$

کتنی بار مسلسل یہی عمل کرنے سے بالآخر

$$\text{جیب } \theta = 2^{-\theta} \text{ اجیب } \frac{\theta}{n} \text{ جیب } \frac{\theta + \pi}{n} \text{ جیب } \frac{\theta + 2\pi}{n} \dots \text{جیب } \frac{\theta + n(1-\pi)}{n}$$

(7).....

جہاں ن ۲۱ کی قوت کو تعمیر کرتا ہے۔

مساوات (۴) میں آخری جزو ضربی

$$\text{حب} \left[ \frac{\text{ح} - \text{ج}}{\text{ن}} \right] = \frac{\text{حب} - \text{ج}}{\text{ن}}$$

ہے، آخر کی طرف سے دوسرا جزو ضروری

$$\text{جب } \frac{p - 12}{0} = \left[ \frac{p - 12}{0} - 1 \right] \text{ جب } \frac{p + 1(2 - 0)}{0}$$

ہے اور علی ہذا القیاس

اسی طرح دوسرے جہود صہبی اور آخری جہود صہبی کو اکٹھا لینے سے اور

تیسرے جزو مغربی اور آخر کی طرف سے دوسرے جزو مغربی کو اکٹھا لینے

..... علی بن الحقیس، مسادات (۴) ذیل کی شکل میں بھی لکھی

ہائیکٹی

جواب = ۳ [جواب ۴] [جواب ۵] [جواب ۶]

(c) ...

اس میں آخری جزو ضربی

$$\text{جیب } \frac{\pi}{n} = \left( \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{n} = \frac{3\pi}{2n}$$

اسلمنے مسدوات (۵) ہوجاتی ہے

$$\text{جب طہ} = ۲ - \frac{۱}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲} \left[ \text{جب } \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲} \right] \left[ \text{جب } \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲} \right] \dots \dots \dots \left[ \text{جب } \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \left( ۱ - \frac{۱}{۲} \right) \right] \times \text{جم طہ} \dots \dots \dots (۶)$$

مسادات (۶) کی دونوں جانبوں کو جب طہ پر تقسیم کرو اور طہ کو صفر بناؤ  
چونکہ  $\left[ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} \right] = \left[ \text{ن جب طہ} \times \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} \right] = \dots \dots \dots$   
اگلے مسادات (۶) پر جاتی ہے

$$\text{ن} = ۲ - \frac{۱}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲} \dots \dots \dots \text{جب } \frac{۱}{۲} \left( ۱ - \frac{۱}{۲} \right) \dots \dots \dots (۷)$$

مسادات (۶) کو مسادات (۷) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{جب طہ} = \text{ن جب طہ} \left[ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} - ۱ \right] \left[ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} - ۱ \right] \left[ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} - ۱ \right] \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \left[ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} - ۱ \right] \text{جم طہ} \dots \dots \dots (۸)$$

اب ن کو لا انتہا بڑا دو تب

چونکہ  $\left[ \text{ن جب طہ} \right] = \dots \dots \dots \left[ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} \times \text{طہ} \right] = \dots \dots \dots$  (دفعہ ۳ حصہ اول)

$$\left[ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} \right] = \dots \dots \dots \left[ \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب طہ}} \times \frac{\text{طہ}}{\text{طہ}} \times \frac{\text{طہ}}{\text{طہ}} \times \frac{\text{طہ}}{\text{طہ}} \right] = \dots \dots \dots \frac{\text{طہ}}{\text{طہ}} \dots \dots \dots \text{دفعہ ۳ حصہ اول}$$

اور علیٰ بڑا القیاس، اسلئے

$$\text{جب } ط = ط \left( ۱ - \frac{ط}{۱۴} \right) \left( ۱ - \frac{ط}{۲۲} \right) \left( ۱ - \frac{ط}{۳۴} \right) \dots \dots \dots \text{تلا متناہی}$$

یہ سلسلہ ذیل کی شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\text{جب } ط = ط \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left( ۱ - \frac{ط}{۳۴} \right)$$

۱۲۳۔ جہم طہ کو اجزائے ضربی کے ایک لا متناہی سلسلہ کے  
حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرو۔

دفعہ ۱۲۲ کی مسادات ۱۴ میں طہ کی بجائے مقدار ط +  $\frac{ط}{۳}$  لکھو

تب یہ مسادات ہو جاتی ہے

$$\text{جب } ط = ط \cdot \frac{ط + ۱۴}{۱۴} \cdot \frac{ط + ۲۲}{۲۲} \cdot \frac{ط + ۳۴}{۳۴} \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \text{جب } \frac{ط + ۱۴(۱ - ۱۴)}{۱۴} \dots \dots \dots (۱)$$

آخری جزو ضربی

$$= \text{جب } \left[ \frac{ط + ۱۴}{۱۴} - ۱۴ \right] = \text{جب } \frac{ط - ۱۴}{۱۴}$$

آخر کی طرف سے دوسرا جزو ضربی

$$= \text{جب } \left[ \frac{ط + ۱۴(۳ - ۱۴)}{۱۴} \right] = \text{جب } \frac{ط - ۲۲}{۱۴}$$

اور علیٰ بڑا القیاس

لہذا حسب سابق دو در اجزائے ضربی کو اکٹھا لیجئے



$$\text{جہ ط} = \frac{1}{2} \left[ \text{جب } \frac{2+2}{2} \right] \left[ \text{جب } \frac{2-2}{2} \right] \left[ \text{جب } \frac{2+2}{2} \right] \left[ \text{جب } \frac{2-2}{2} \right] \dots \dots \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \text{جب } \frac{2}{2} - \text{جب } \frac{2}{2} \right] \left[ \text{جب } \frac{2}{2} - \text{جب } \frac{2}{2} \right] \dots \dots \dots (۲)$$

مساوات (۲) میں ط کو صفر بنانے سے

$$1 = \frac{1}{2} \left[ \text{جب } \frac{2}{2} - \text{جب } \frac{2}{2} \right] \dots \dots \dots (۳)$$

مساوات (۲) کو (۱۴) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{جہ ط} = \left[ \frac{\text{جب } \frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} - 1 \right] \left[ \frac{\text{جب } \frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} - 1 \right] \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \left[ \frac{\text{جب } \frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} - 1 \right] \dots \dots \dots (۴)$$

اب مساوات (۴) میں ن کو لا انتہا بڑھا دیا تب جب دفعہ ماقبل

$$\text{جہ ط} = \left[ \frac{\text{جب } \frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} - 1 \right] \left[ \frac{\text{جب } \frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} - 1 \right] \dots \dots \dots$$

اختصار کی خاطر اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{جہ ط} = \left\{ \frac{\text{جب } \frac{2}{2}}{\frac{2}{2}} - 1 \right\}^{\infty}$$

چونکہ جہ ط = جب ط

اس لئے جہ ط کا حاصل ضرب جب ط اور جب ط کے حاصل ضرب میں



ہند ان کی تمام صحیح قوتوں کے لئے

جب  $ط = ۵۲$  - جب  $ط$  جب  $ط + ۱$  جب  $ط + ۲$  ... جب  $(۱ - ۱) + ط$   
۱۲۵ - جب  $ط$  اور  $ط$  کے اجزاء کے ضربی لائننا ہی  
سلسلہ میں - دفعہ ۶۸ کی رو سے

جب  $ط =$  - جب  $(ط)$  اور  $ط =$  جب  $(ط)$   
نیز چونکہ دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ کے سلسلے مسئلہ جمع پر مبنی ہیں اس لئے  
یہ اُس صورت میں بھی درست ہونگے جب  $ط$  کو  $ط$  میں بدل دیا جائے۔

$$\therefore \text{جب } ط = - ط \times ط (۱ - \frac{ط}{ط}) (۱ - \frac{ط}{ط}) (۱ - \frac{ط}{ط}) \dots (۱ - \frac{ط}{ط})$$

$$= ط (۱ + \frac{ط}{ط}) (۱ + \frac{ط}{ط}) (۱ + \frac{ط}{ط}) \dots (۱ + \frac{ط}{ط}) \dots \dots \dots$$

$$\text{اور جب } ط = (۱ - \frac{ط}{ط}) (۱ - \frac{ط}{ط}) (۱ - \frac{ط}{ط}) \dots (۱ - \frac{ط}{ط}) \dots \dots \dots$$

$$= (۱ + \frac{ط}{ط}) (۱ + \frac{ط}{ط}) (۱ + \frac{ط}{ط}) \dots (۱ + \frac{ط}{ط}) \dots \dots \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) دونوں مستق سلسلے ہیں۔ کیونکہ ہمیں معلوم ہے (دیکھو سی سمتھ کا الجبرا دفعہ ۳۳)

کہ سلسلہ لائننا ہی II (۱ + ی) مستق ہوگا اگرچہ یان مستق ہو۔

مسادات (۱) میں صحیح یان

$$= \frac{ط}{ط} (۱ + \frac{۱}{ط} + \frac{۱}{ط} + \frac{۱}{ط} + \dots)$$

اور ہمیں معلوم ہے کہ یہ سلسلہ مستق ہے۔

۱۲۶ - طبعی اعداد کے متکافیوں کی قوتوں کے مجموعے

دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ کی رو سے ہم چند دلچسپ سلسلوں کے حامل

جمع معلوم کر سکتے ہیں

دفعات ۳۳ اور ۱۲۲ سے ہیں معلوم ہے کہ

$$(1 - \frac{1}{2^{33}}) (1 - \frac{1}{2^{122}}) (1 - \frac{1}{2^{122}}) \dots \dots \dots$$

$$= \frac{1}{2^{33}} + \frac{1}{2^{122}} + \frac{1}{2^{122}} + \dots \dots \dots$$

طرفین کے لوکار رقم لینے سے

$$\dots \dots \dots + (1 - \frac{1}{2^{33}}) \text{ لوک} + (1 - \frac{1}{2^{122}}) \text{ لوک} + (1 - \frac{1}{2^{122}}) \text{ لوک} \dots \dots \dots$$

$$(1) \dots \dots \dots [ \dots - \frac{1}{2^{122}} + \frac{1}{2^{33}} - \dots ] \text{ لوک} =$$

اب دفعہ ۸ کی طرف سے

$$\text{لوک} (1 - \frac{1}{2^{33}}) = [ \dots + \frac{1}{2^{33}} + \frac{1}{2^{122}} + \frac{1}{2^{122}} + \dots ]$$

$$\text{اور لوک} (1 - \frac{1}{2^{122}}) = [ \dots + \frac{1}{2^{122}} + \frac{1}{2^{33}} + \frac{1}{2^{33}} + \dots ]$$

.....

لہذا مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$[ \dots + \frac{1}{2^{33}} + \frac{1}{2^{122}} + \frac{1}{2^{122}} + \dots ] \frac{1}{2^{33}} - [ \dots + \frac{1}{2^{122}} + \frac{1}{2^{33}} + \frac{1}{2^{33}} + \dots ] \frac{1}{2^{122}} -$$

$$\dots [ \dots + \frac{1}{2^{33}} + \frac{1}{2^{122}} + \frac{1}{2^{122}} + \dots ] \frac{1}{2^{33}} -$$

$$= \text{لوک} [ (1 - \frac{1}{2^{122}} + \frac{1}{2^{33}} - \frac{1}{2^{122}} + \dots) ]$$

$$\dots - \left( \dots + \frac{2^2}{120} - \frac{2^2}{4} \right) \frac{1}{2} - \left( \dots + \frac{2^2}{120} - \frac{2^2}{4} \right) \frac{1}{2} - \dots$$

$$\dots - \left( \frac{1}{34} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{120} \right) \frac{2^2}{4} + \frac{2^2}{4} - \dots$$

$$\dots - \frac{2^2}{120} - \frac{2^2}{4} - \dots (2)$$

چونکہ مساوات (۲) طہ کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اسلئے طہ کے مساوات کے دونوں جانب برابر ہونے چاہئیں نیز طہ کے سر برابر ہونے چاہئیں، وغیرہ وغیرہ

$$\frac{1}{4} - \dots = \left( \dots + \frac{1}{34} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{2} - \dots$$

$$\frac{1}{120} - \dots = \left( \dots + \frac{1}{34} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \dots$$

$$\dots = \frac{2^2}{4} = \dots + \frac{1}{34} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \text{ لہذا (۳)}$$

$$\dots = \frac{2^2}{9} = \dots + \frac{1}{34} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \text{ اور (۴)}$$

۱۲۷۔ یہی عمل دفعہ ۱۲۳ کے سلسلہ پر کرنے سے

$$\dots \left( \frac{2^2}{120} - 1 \right) \left( \frac{2^2}{120} - 1 \right) \left( \frac{2^2}{120} - 1 \right)$$

$$\dots = \frac{2^2}{120} + \frac{2^2}{4} - 1 = \text{جم طہ}$$

$$\dots + \left( \frac{2^2}{120} - 1 \right) \text{ لوک} + \left( \frac{2^2}{120} - 1 \right) \text{ لوک} + \left( \frac{2^2}{120} - 1 \right) \text{ لوک}$$

$$= \text{لوک} \left[ \dots - \frac{2^2}{120} + \frac{2^2}{4} - 1 \right]$$

لہذا حسب سابق

$$\begin{aligned}
 & \left( \dots + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} \right) \frac{r^2}{r_1} - \\
 & \dots + \left( \dots + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} \right) \frac{r^4}{r_1} - \\
 & = \text{لوک} [1 - \left( \dots + \frac{r^2}{r_5} - \frac{r^2}{r_1} \right)] \\
 & = \dots + \left( \dots + \frac{r^2}{r_5} - \frac{r^2}{r_1} \right) \frac{1}{r_1} - \left( \dots + \frac{r^2}{r_5} - \frac{r^2}{r_1} \right) - \\
 & = \dots - \left( \dots - \frac{r^2}{r_1} \right) \frac{1}{r_1} - \dots + \frac{r^2}{r_5} + \frac{r^2}{r_1} - \\
 & = \dots - \frac{r^2}{r_1} - \frac{r^2}{r_1} = \\
 & \text{ط}^2 \text{ کے سروں کو مساوی کرنے سے}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r_1} - \left( \dots + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} \right) \frac{r^2}{r_1} - \\
 & \text{اور ط}^2 \text{ کے سروں کو مساوی کرنے سے} \\
 & \frac{1}{r_1} - \left( \dots + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} \right) \frac{r^2}{r_1} -
 \end{aligned}$$

..... علیٰ ہذا القیاس

$$\begin{aligned}
 (1) \dots \dots \frac{r^2}{r_1} &= \dots + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} \text{ یعنی} \\
 (2) \dots \dots \frac{r^2}{r_1} &= \dots + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} \text{ اور}
 \end{aligned}$$

.....

۱۲۸ - والس کا ضابطہ .... دفعہ ۱۲۲ کے جملہ میں طہ کو  $\frac{\pi}{4}$  کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{\pi}{4} = 1 \left[ \frac{1}{2} - 1 \right] \left[ \frac{1}{3} - 1 \right] \left[ \frac{1}{4} - 1 \right] \dots \dots \dots \text{تالا متناہی}$$

$$\frac{(1+N)(1-N)}{2(N)} \times \frac{(1-N)(3-N)}{2(2-N)} \dots \dots \frac{4 \times 5}{24} \times \frac{5 \times 3}{23} \times \frac{3 \times 1}{22} \times \frac{\pi}{4} =$$

جہاں  $N$  لانتہا بڑا ہے

$$\frac{2(1+N) \times 2(1-N) \dots \dots 4 \times 5 \times 3 \times 1}{2(N) \dots \dots 24 \times 23 \times 22} = \frac{\pi}{4} \text{ یعنی}$$

$$\frac{N}{(1-N)} \times \frac{\pi}{4} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 1}{(1-N) \dots \dots 4 \times 5 \times 3 \times 1} \text{ یعنی}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر  $N$  بہت بڑا ہو (لیکن ضروری نہیں کہ لانتہا ہی ہو) تو

$$\frac{N}{(1-N)} \times \frac{\pi}{4} \approx \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3 \times 1}{(1-N) \dots \dots 4 \times 5 \times 3 \times 1}$$

جو بالآخر =  $\pi N$

اس ضابطہ کو والس کا ضابطہ کہتے ہیں - اور اس سے اس نسبت کی تقریبی

قیمت نہایت آسان اور ساوہ شکل میں ظاہر ہوتی ہے جو پہلے  $N$  جنت اعداد کے

حاصل ضرب کو پہلے  $N$  طاق اعداد کے حاصل ضرب کے ساتھ ہے جبکہ  $N$  بہت بڑا ہو

۱۲۹ - مشق - ثابت کرو کہ

$$\left\{ \dots \dots \dots + \frac{1}{2^2 \times 3 - 2^2 \times 5} + \frac{1}{2^2 \times 3 - 2^2 \times 7} + \frac{1}{2^2 \times 3 - 2^2 \times 11} \right\}$$

دفعہ ۱۲۳ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{لوک جم طہ} = \text{لوک} \left( 1 - \frac{2^2 \times 3}{2^2 \times 11} \right) + \text{لوک} \left( 1 - \frac{2^2 \times 3}{2^2 \times 7} \right) + \text{لوک} \left( 1 - \frac{2^2 \times 3}{2^2 \times 5} \right) \dots \dots (1)$$

اس مساوات میں طہ کی بجائے (طہ + ھ) لکھنے سے

$$\text{لوک جم (طہ + ھ)} = \text{لوک} \left[ 1 - \frac{2}{2^2} (\text{طہ} + ھ) \right] + \text{لوک} \left[ 1 - \frac{2}{2^3} (\text{طہ} + ھ) \right] + \dots + (2)$$

$$\text{اب لوک جم (طہ + ھ)} = \text{لوک} [\text{جم طہ (جم ھ - مس طہ جب ھ)}]$$

$$= \text{لوک جم طہ + لوک} \left[ 1 - \frac{2}{2^2} + \dots - \text{مس طہ (ھ - } \frac{2}{2^2} + \dots) \right] \dots \text{دفعہ ۳}$$

$$= \text{لوک جم طہ + لوک} [1 - \text{مس طہ + ھ کی بڑی قوتیں}]$$

$$= \text{لوک جم طہ - ھ مس طہ + ھ کی بڑی قوتیں} \dots \dots \dots \text{دفعہ ۸}$$

$$\text{ نیز لوک} \left[ 1 - \frac{2}{2^2} (\text{طہ} + ھ) \right] = \text{لوک} \left[ 1 - \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} \right] + \dots$$

$$= \text{لوک} \left[ 1 - \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} + \dots \text{ ھ کی بڑی قوتیں} \right]$$

$$\text{اور لوک} \left[ 1 - \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} (\text{طہ} + ھ) \right]$$

$$= \text{لوک} \left[ 1 - \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} + \dots \text{ ھ کی قوتیں} \right] -$$

.....

مساوات (۲) میں یہ قیمتیں درج کرنے اور مساوات کے دونوں طرف

۲ ھ کے سرور کو براب کرنے سے

$$\text{مس طہ} = \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} + \dots + (3)$$

$$= \frac{2}{2^2} \frac{2}{2^2} (1 + 2 + \dots)$$



سلسلہ (۳) کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{2}{2 - \text{طہ}} - \frac{2}{2 + \text{طہ}} + \frac{2}{2 - \text{طہ}} - \frac{2}{2 + \text{طہ}} + \dots$$

جو طالب علم احصاء و تفرقات سے واقف ہے۔ اس سے مخفی نہیں کہ مساوات

(۳) مساوات (۱) کو لمبا ط کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۳۰۔ مشتق۔ ثابت کرو کہ جمر ۲ عہ۔ جم ۲ طہ

$$= 2 \text{ جب } 2 \text{ طہ} \left[ 1 + \frac{2}{2 - \text{طہ}} \right] \left[ 1 + \frac{2}{2 + \text{طہ}} \right] \left[ 1 + \frac{2}{2 - \text{طہ}} \right] \dots$$

$$\dots \left[ 1 + \frac{2}{2 - \text{طہ}} \right] \left[ 1 + \frac{2}{2 + \text{طہ}} \right] \dots$$

$$= 2 \text{ جب } 2 \text{ طہ} \left[ 1 + \frac{2}{2 + \text{طہ}} \right] \dots$$

جہاں را صفر ہے یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

جمر ۲ طہ۔ جم ۲ طہ = جم ۲ خ عہ۔ جم ۲ طہ = ۲ جب (طہ + خ عہ) جب (طہ - خ عہ)

$$= 2 \text{ جب } (2 + \text{طہ} - \text{خ عہ}) \left[ 1 - \frac{2}{2 - \text{طہ} - \text{خ عہ}} \right] \left[ 1 - \frac{2}{2 + \text{طہ} - \text{خ عہ}} \right] \dots$$

$$\dots \left[ 1 - \frac{2}{2 - \text{طہ} - \text{خ عہ}} \right] \left[ 1 - \frac{2}{2 + \text{طہ} - \text{خ عہ}} \right] \dots (1)$$

$$\text{اب } \left[ 1 - \frac{2}{2 - \text{طہ} - \text{خ عہ}} \right] \left[ 1 - \frac{2}{2 + \text{طہ} - \text{خ عہ}} \right]$$

$$= \left[ \frac{(2 - \text{طہ} - \text{خ عہ})(2 + \text{طہ} - \text{خ عہ})}{2 - \text{طہ} - \text{خ عہ}} \right] \left[ \frac{(2 - \text{طہ} - \text{خ عہ})(2 + \text{طہ} - \text{خ عہ})}{2 + \text{طہ} - \text{خ عہ}} \right]$$

$$= \frac{2 + 2(\text{طہ} - \text{خ عہ})}{2 - \text{طہ} - \text{خ عہ}} \times \frac{2 + 2(\text{طہ} + \text{خ عہ})}{2 + \text{طہ} - \text{خ عہ}} =$$



$$3 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-2) \times (n-1)} + \frac{1}{(n-1) \times n}$$

$$3 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-2) \times (n-1)} + \frac{1}{(n-1) \times n}$$

$$3 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-2) \times (n-1)} + \frac{1}{(n-1) \times n}$$

۵۔ ثابت کرو کہ اگر تمام طاق اعداد کے مربوں کے متکافوں میں سے دو دو کو باہم ضرب دیا جائے تو ان حاصل ضربوں کا مجموعہ  $\frac{n^2-1}{4}$  ہوتا ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ اگر تمام طبعی اعداد کے مربوں کے متکافوں میں سے دو دو کو باہم ضرب دیا جائے تو ان حاصل ضربوں کا مجموعہ  $\frac{n^2-1}{4}$  ہوگا۔  
ثابت کرو کہ

$$6 - m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$8 - m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$[ \text{رابطہ رقم} = \frac{1}{2} ( \text{م} + \text{م} ) \text{ کو استعمال کرو} ]$$

$$9 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$



$$\left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \pi 3)} - 1 \right] \left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \pi)} - 1 \right] \left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \pi)} - 1 \right] = \frac{\text{جم ط} + \text{جم ع}}{\text{جم} + 1} \quad ۱۶$$

$$\left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \pi 3)} - 1 \right] \Pi = \dots \dots \left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \pi 3)} - 1 \right]$$

یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔

[مشق ۱۲ اور ۱۵ کے جوابوں کو ضرب دو اور پھر ۲ ط کو ط میں اور ۲ ع کو

ع میں بدل دو]

$$\left\{ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \pi 2)} - 1 \right\} \left\{ \frac{\text{ط}^2}{2\text{ع}} - 1 \right\} = \frac{\text{جم ط} - \text{جم ع}}{\text{جم} - 1}$$

$$\left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \pi 3)} - 1 \right] \Pi = \dots \dots \left\{ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \pi 4)} - 1 \right\} \left\{ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \pi 2)} - 1 \right\}$$

کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے یا صفر ہے۔

اس سے جز ۱ - جم ع کے اجزائے ضربی مستنبط کرو۔

$$18 = \frac{\text{جب ع} - \text{جب ط}}{\text{جب ع}} = (1 - \frac{\text{ع}}{\text{ط}}) (1 - \frac{\text{ط}}{\text{ع} - \pi}) (1 + \frac{\text{ط}}{\text{ع} + \pi})$$

$$\dots \dots (1 + \frac{\text{ط}}{\text{ع} + \pi 2}) (1 - \frac{\text{ط}}{\text{ع} - \pi 2})$$

$$19 = 2 - 2 \text{ بحر ط} + 2 \text{ جم ط} = \frac{\text{جم ط}}{2} \left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \pi)} + 1 \right] \left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \pi)} + 1 \right] \dots \dots$$

$$20 = \frac{\text{جم ط}}{2} \Pi \left[ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \pi 3)} - 1 \right] \text{ جہاں } \Pi \text{ کوئی مثبت}$$

یا منفی طاق صحیح عدد ہے

۲۰۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جنر ن ی} = \text{ن جنر ی} \quad \text{جس کا } \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \quad \text{جب } \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

اور اس سے جنری کے اجزائے جنری کے لئے حاصل ضربوں کا ایک ایسا  
لاٹنہی سلسلہ مستنبط کرو جس کا ہر جزو جنری بلحاظ ہی کے درجہ دوم کی ایک رقم ہو۔  
[دفعہ ۲۱ کی مشق اول کے جواب سے شروع کرنا، پہلے طہ کو صفر بناؤ اور پھر اس  
جواب میں فہ کو صفر کر دو بعد ازاں تقسیم کرو]

۲۱۔ ثابت کرو کہ لاٹنہی سلسلہ

$$(1 + \frac{1}{1}) (1 + \frac{1}{2}) (1 + \frac{1}{3}) \dots \dots \dots \text{ لاٹنہی}$$

کا حاصل ضرب  $\frac{1}{n}$  جنر ۳ ہے۔

۲۲۔ ایک نصف دائرہ کے محیط کے م برابر حصے کئے گئے ہیں اور ایک  
دوسرے ہم مرکز نصف دائرہ کے جو پہلے نصف دائرہ کے ہم وضع رکھا گیا ہے ن  
بند ہر حصے کئے گئے ہیں۔ پہلے نصف دائرہ کا ہر ایک نقطہ تقسیم دوسرے نصف  
دائرہ کے ہر ایک نقطہ تقسیم سے مایا گیا ہے۔ ان نقاط کے ملنے سے خطوں کے  
مربعوں کا اور سطح حسابی دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اگر ن اور ن کو لاٹنہی بنا دیا جائے  
تو واسطہ گورڈ + ج ۲ =  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n}$  ہوگا۔ جہاں ۱ اور ۲ نصف دائروں کے نصف قطر ہیں۔  
۲۳۔ ہم مرکز دائروں کا ایک لاٹنہی نظام دیا ہوا ہے، ان دائروں کے نصف قطر  
بالترتیب  $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots$  ہیں۔ ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ مشترک مرکز سے ج ( $< 1$ ) ہے  
سب دائروں کے تماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان تماسوں کے محاذی مشترک

مرکز بہم بالترتیب زاوئے طہ، طہ، طہ، ..... بنیں تو

جب طم جب طم جب طم ..... =  $\left[ \frac{ج}{4\pi} \text{ جب } \frac{4\pi}{ج} \right]^{\infty}$  ۲۴۔ نقاط کی ایک لامتناہی تعداد ایک لامتناہی طول کے خط مستقیم کو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ہر مساوی حصہ کا طول ۱ ہے، اگر ن ایک ایسا نقطہ ہو جس کا فاصلہ خط مستقیم سے ۱ ہو اور ایک نقطہ تقسیم سے ن کا وہ فاصلہ جو خط مستقیم پر ناپ جائے لا ہو تو ثابت کرو کہ نقطہ ن کے جو فاصلے سب نقاط تقسیم سے ہیں ان کے شکائیوں کے مربعوں کا مجموعہ

$$\frac{\frac{1\pi^2}{9} \text{ جبر}}{\frac{1\pi^2}{9} \text{ جزم} - \frac{1\pi^2}{9} \text{ جزم}} \times \frac{1}{1}$$

ہوگا۔ [مشق ۷ کے جواب کو استعمال کرو]

۲۵۔ اگر 'ا' ب' ج' ..... سے تمام مفرد اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ..... مراد لئے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2\pi} = \dots\dots\dots \left( \frac{1}{2\pi} - 1 \right) \left( \frac{1}{2\pi} - 1 \right) \left( \frac{1}{2\pi} - 1 \right) \dots\dots\dots$$

$$\frac{15}{2\pi} = \dots\dots\dots \left( \frac{1}{2\pi} + 1 \right) \left( \frac{1}{2\pi} + 1 \right) \left( \frac{1}{2\pi} + 1 \right) \dots\dots\dots$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ

$$\left[ \frac{1}{2\pi} - 1 \right]^{\infty} \text{ II} \\ \frac{ج}{1+ج} = \frac{\text{جب } \{ \pi \sqrt{1+ج} + 1 \}}{\text{جب } \pi}$$

# باب دوم

## اصول اجزائے متناسب

۱۳۱۔ باب میں ہم اجزائے متناسب کے اصول پر بحث کریں گے۔ اس اصول کی صحت کو ہم نے حصہ اول باب یازدہم میں بلا ثبوت تسلیم کر لیا تھا۔ وہاں ہم نے یہ تسلیم کیا تھا کہ اگر  $n$  اور  $m$  دو متصل اعداد ہوں جن کے لوکارتم جدولوں میں دئے ہوئے ہوں اور اگر  $h$  کوئی کسر ہو تو اعشاریہ کے ساتویں مقام تک

$$\text{لوک (ن + ہ) - لوک ن} \\ \text{لوک (ن + ۱) - لوک ن} = \frac{h}{n}$$

اب ہم اس بیان کی صحت پر ثور کریں گے۔

۱۳۲۔ مروج لوکارتم - دفعہ ۱۲ کی رو سے

$$\text{لوک (ن + ہ) - لوک ن} = \text{لوک } \frac{ن + ہ}{ن} = \text{مب لوک } (۱ + \frac{ہ}{ن})$$

$$\text{جہاں مب} = ۵۴۳۲۹۲۲۸۰۰۰$$

پس دفعہ ۸ کی رو سے

$$\text{لوک (ن + ہ) - لوک ن} = \frac{\text{مب}}{ن} - \frac{\text{مب}}{۲} \times \frac{۲}{ن} + \frac{\text{مب}}{۳} \times \frac{۳}{ن} - \dots$$

اب لوکارتم کی معمولی جدولوں میں  $n$  پانچ ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے







تیسری رقم کی نسبت پہلی رقم کے ساتھ = پاک اور یہ ہمیشہ  $\frac{1}{2}$  (۰.۵۰۰۳)  
یعنی ۰.۵۰۰۰۰۰۰۲ سے کم ہوتی ہے۔ پس تیسری رقم اور رقوم  
ابعد بلا خوف نظر انداز کی جاسکتی ہیں۔ تب

جب (ط + ک) - جب ط = ک حجم ط - کچھ جب ط .... (۱)  
پہلی رقم کی مددی نسبت دوسری رقم کے ساتھ

۱۔ ایک مسطح ..... (۲)

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے  
جب  $\frac{a}{b} = 1$  کے تقریباً برابر ہو اس لئے سوائے اس صورت  
کے جب  $\frac{a}{b}$  زیادہ  $\frac{a}{b}$  قائمہ کے تقریباً برابر ہو مساوات (۱) میں  
دوسری رقم کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے

تب جب (ط + ک) - جب ط = ک جم ط  
اسی طرح سے جب (ط + ه) - جب ط = ه جم ط

لہذا  $\frac{\text{جب (ط + ک) - جب ط}}{\text{جب (ط + ح) - جب ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{ح}} \dots\dots\dots (۳)$

اگر طہ زاد یہ قائمہ کے بالکل قریب ہو تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ  
جب (طہ + ک) - جب طہ = ک جم طہ

اور اس لئے ربط (۳) اس صورت میں قائم نہیں رہتا اور حبیب کا فرق زاویہ کے فرق کے تناسب نہیں ہوتا پس اس صورت میں فرق بے قاعدہ ہوتے ہیں لیکن ساتھ ہی فرق نہایت خفیف ہونگے کیونکہ اگر طہ  $\frac{7}{4}$  کے بالکل قریب ہو تو ک جمع طہ بہت چھوٹا ہوگا۔ دراصل اگر زاویہ طہ اور زاویہ قائمہ کا فرق چند



تیسری رقم اور رقوم مابعد حسب سابق ترک کی جاسکتی ہیں سوائے اس صورت کے جب زاویہ ط قائمہ کے بہت قریب ہو۔

تب اگر مقدار ک  $\frac{1}{\sin \theta}$  جب ط بہت بڑی نہ ہو تو

$$\text{مس (ط + ک) - مس ط = ک قط ط} \dots\dots\dots (۲)$$

اور اصول تقریباً درست اور برقرار رہیگا۔

اگر ط  $\frac{1}{\sin \theta}$ ، تو مساوات (۱) کی دوسری رقم  $\frac{1}{\sin \theta}$  کے

پس اگر ہم ک کی بڑی سے بڑی قیمت (یعنی تقریباً ۳۰۰۰۰۰)

لیں تو اس سے اعشاریہ کے ساتویں مقام پر ملحوظ ہندسہ آئیگا۔ لہذا

جب جدول کے زاویوں کا فرق آہو تو اصول زیر بحث  $\frac{1}{\sin \theta}$  سے

بڑے زاویوں کے لئے درست نہیں ہوگا۔

۱۳۷۔ طبعی کماسات التمام۔ حسب دفعہ ماقبل یہ ثابت کیا جاسکتا

ہے کہ اصول مذکورہ ان زاویوں کے لئے جو صفر اور ۹۰ کے درمیان

واقع ہوں قابل اعتبار نہیں۔

۱۳۸۔ طبعی قاطع۔ ہم جانتے ہیں کہ  $\text{قط (ط + ک) - قط ط}$

$$= \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = 0$$

$$= \text{قط ط} \left\{ 1 - \frac{1}{\sin \theta} \right\}$$

$$= \text{قط ط} [\text{مس ط + ک} \left( \frac{1}{\sin \theta} + \text{مس ط} \right) + \dots]$$

$$= \text{ک قط ط مس ط + ک قط ط} \left( \frac{1}{\sin \theta} + \text{مس ط} \right) + \dots\dots\dots (۱)$$

دوسری رقم کی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

$$= \frac{ک + مس ط}{مس ط} = ک [ \frac{1}{مس ط} + مس ط ]$$

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ ط صفر ہو  
کے بہت قریب ہو اس لئے سوائے ان دو صورتوں کے  
قط (ط + ک) - قط ط = ک مس ط قط ط

پس اصول مذکور ثابت ہوا۔

اگر ط بہت چھوٹا ہو تو رقم ک قط ط مس ط بہت چھوٹی ہوگی اور  
فرق بے قاعدہ ہونے کے علاوہ نہایت خفیف ہونگے اگر ط کے  
بالکل قریب ہو تو یہ رقم بڑی ہوگی اس لئے اس صورت میں فرق خفیف  
نہ ہوں گے۔

۱۳۹۔ طبعی قاطع التمام۔ جیسے قاطع کی صورت میں ثابت کیا گیا ہے  
ویسے ہی قاطع التمام کی صورت میں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ فرق  
خفیف اور بے قاعدہ ہوں گے اگر ط ۹۰ کے قریب ہو اور بے قاعدہ  
ہوں گے اگر ط صفر کے قریب ہو۔ سوائے ان صورتوں کے اصول  
برقرار رہتا ہے۔

۱۴۰۔ لوکارتھی حیوب کی جدولوں کے متعلق۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$ل جب (ط + ک) - ل جب ط = لوکب \frac{جب (ط + ک)}{جب ط}$$

$$= لوکب [ جم ک + مم ط جب ک ] = لوکب [ ا + ک مم ط - ک ]$$

(دفعات ۳۲ اور ۳۳)

$$= \text{مب} \left[ \text{ک مم ط} - \frac{\text{ک}}{\text{ط}} - \frac{\text{ک}}{\text{ک مم ط}} + \dots \right]$$

(دفعات ۸ اور ۱۲)

== مب ک مم ط - مب ک مم ط .....  
دوسری رقم کی عددی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

$$= \frac{\text{ک}}{\text{ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{جب ط مم ط}}$$

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ ط صغریٰ  
زاویہ قائمہ کے قریب ہو۔

لہذا سوائے ان دو صورتوں کے

$$\text{ل جب (ط + ک) - ل جب ط} = \text{مب مم ط} \times \text{ک}$$

پس اصول عام طور پر درست ہے۔

اگر ط چھوٹا ہو تو رقم مب ک مم ط بڑی ہوگی اور بنا برین فرق بڑے اور  
بے قاعدہ ہونگے۔ اس لئے ہم ان جدولوں میں جو ا کے فرق پر مرتب  
کی گئی ہوں چھوٹے زاویوں پر اس اصول کا اطلاق نہیں کر سکتے۔

فیض خواہ جدولیں ۱۰ کے فرقوں پر مرتب کی گئی ہوں تو بھی ہم اعشاریہ  
کے ساتویں مقام پر غلطی کے احتمال سے مطمئن نہیں ہو سکتے تا وقتیکہ ط ۵  
سے بڑا نہ ہو۔

اگر ط ۹۰ کے بہت قریب ہو تو رقم مب ک مم ط اور مب ک مم ط  
دونوں بہت چھوٹی ہونگی۔ لہذا اگر ط زاویہ قائمہ کے قریب ہو تو فرق  
خفیف اور بے قاعدہ ہوں گے۔

۱۴۱۔ لوکارٹی جیوب التمام کی جدولوں کے متعلق۔ چونکہ کسی زاویہ کی

جیب اس زاویہ کے متحمل کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے اس لئے  
اس صورت میں بھی اصول مذکور برقرار رہتا ہے سوائے ان دو صورتوں  
کے جب زاویہ بہت چھوٹا ہو یا ۹۰ کے قریب ہو پہلی صورت میں  
فرق بے قاعدہ اور نیز خفیف ہوں گے اور دوسری صورت میں  
یہ بہت بڑے ہوں گے۔

۱۴۲۔ لوکارتمی ماسوں کی جدولوں کے متعلق۔ اس صورت میں  
ل مس (ط + ک)۔ ل مس ط

$$= \text{لوک} \frac{\text{مس (ط + ک)}}{\text{مس ط}} = \text{لوک} \frac{۱ + \text{م م ط مس ک}}{۱ - \text{مس ط مس ک}}$$

$$= \text{لوک} \left[ \frac{۱ + \text{ک م م ط}}{۱ - \text{مس ط}} \right]$$

$$= \text{لوک} \left[ (۱ + \text{ک م م ط}) (۱ + \text{ک مس ط} + \text{ک مس ط} + \text{ک مس ط} + \dots) \right]$$

$$= \text{لوک} \left[ ۱ + \frac{\text{ک}}{\text{جب ط جم ط}} + \frac{\text{ک}^۲}{\text{جم ط}^۲} + \dots \right]$$

$$= \text{مب} \left[ \frac{\text{ک}}{\text{جب ط جم ط}} + \frac{\text{ک}^۲}{\text{جم ط}^۲} - \frac{۱}{۲} \frac{\text{ک}^۲}{\text{جب ط جم ط}} + \dots \right]$$

(دفعات ۸ اور ۱۲)

$$= \frac{\text{مب ک}}{\text{جب ط جم ط}} - ۲ \frac{\text{مب ک}^۲}{\text{جب ط جم ط}^۲} + \dots$$

دوسری رقم کی عددی نسبت پہلی رقم کے ساتھ  
۲ ک م م ط اور یہ چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ



زاویہ طہ صفر یا زاویہ قائمہ کے قریب ہو اس لئے سوائے ان دو صورتوں کے  

$$ل مس (طہ + ک) - ل س ط = \frac{۲ مس}{جب ۲ ط} \times ک$$
  
 یعنی اصول بالعموم قائم رہیگا۔

متذکرہ بالا دونوں مستثنیٰ صورتوں میں جب  $\frac{۲ مس}{جب ۲ ط}$  چھوٹا نہیں ہوگا اسلئے  
 فرقی بہ قاعدہ ہوں گے لیکن خفیف نہیں ہوں گے۔

یہی الفاظ تمام اس اتمام کے لوکارتموں کی جدولوں کیلئے بھی درست ہوں گے۔  
 ۳۳۱۔ لوکارتمی قاطع اور قاطع اتمام کی جدولوں کے متعلق۔  
 اس صورت میں

ل ق ط (طہ + ک) - ل ق ط ط = ل جم ط - ل جم (طہ + ک)  
 اور ل قم (طہ + ک) - ل قم ط = ل جب ط - ل جب (طہ + ک)  
 اس لئے ل جب ط اور ل جم ط کے نتائج بالترتیب ل قم ط  
 اور ل ق ط ط پر بھی صادق آئیں گے۔



# باب یازدہم

## اغلاط مشاہدہ

۱۴۴۔ اب تک ہم یہ تسلیم کرتے رہے ہیں کہ کسی زاویہ کا مشاہدہ پوری پوری صحت کے ساتھ ہر صورت میں ممکن ہے لیکن فی الحقیقت ایسا نہیں ہوتا۔ ہمارے مشاہدات دو قسم کی اغلاط کے مورد ہو سکتے ہیں اولاً وہ جو کہ آلات کی نادرستی کی وجہ سے وقوع میں آتی ہیں کیونکہ ہمارے آلات نفاذ و تادریجی شکل طور پر صحیح ہوتے ہیں اور ثانیاً وہ جو سوال کے عمل کے دوران میں واقع ہوتی ہیں۔

۱۴۵۔ اگر ہمارے مشاہدات میں کوئی غلطی ہو تو ظاہر ہے کہ بالعموم وہ مقدار بھی جو مشاہدات مذکورہ کی بنیاد پر محسوب کی گئی ہے غلط ہوگی مثلاً اگر حصہ اول دفعہ ۱۹۸ میں عہ کی پیمائش میں کوئی خفیف سی غلطی وقوع میں آئی ہو تو اس سے لاکھ کی قیمت میں بھی جس کا انحصار صرف اس دفعہ کے نتیجہ کے بموجب عہ پر ہے غلطی رونما ہوگی۔

۱۴۶۔ کسی طول کی پیمائش میں غلطی کا قابل لحاظ ہونا بالعموم اس نسبت پر منحصر ہوتا ہے جو غلطی کو طول مذکور کے ساتھ ہو مثلاً لکڑی کے ایک ٹکڑے کو ناپنے میں جس کا طول قریباً ۶ فٹ ہو ایک لہج کی غلطی نہایت وسیع اور قابل لحاظ سمجھی جائے گی۔ لیکن گھڑ دوڑ کے ایک میل لمبے راستے کی

پیمائش میں ایک اینچ کی غلطی کو کوئی وقعت نہیں دی جاسکتی، اور زمین سے چاند کا فاصلہ ناپنے میں تو ایک اینچ کی غلطی بالکل ناقابل لحاظ ہوگی۔  
 ہم ۱۔ ہم یہاں فریض کر لیں گے کہ وہ غلطیاں جن پر ہم بحث کرینگے اتنی چھوٹی ہیں کہ ان کے مربعوں کو (جن کو نیم قطری زاویوں میں ناپنا چاہیے اگر مقدار مذکورہ زاوے ہوں) نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ ہم یہاں ان مقدار میں غلطی معلوم کرنے کی چند مثالیں درج کرتے ہیں جو غلط مقدار کو استعمال کرنے سے حاصل ہوئی ہوں۔

ہم یہاں تسلیم کر لیں گے کہ ہماری جدولیں اور عمل دونوں درست ہیں یعنی ہم عمل کی غلطیوں کو معرض بحث میں نہیں لائیں گے بلکہ صرف ابتدائی مشاہدہ کی اغلاط پر اکتفا کریں گے۔

۱۴۸۔ مشق ۱۔ م ع ایک عمودی لاٹھ ہے۔ (حصہ اول دفعہ ۴ کی شکل ملاحظہ ہو) ایک نقطہ و سے جس کا فاصلہ اس کے قاعدہ سے  $\frac{1}{2}$  ہے لاٹھ کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ط مشاہدہ کیا گیا ہے اور لاٹھ کی بلندی اس پیمائش کی بنا پر محسوب کی گئی ہے۔ اگر ط کے مشاہدہ کرنے میں غلطی لہ واقع ہوئی ہو تو معلوم کرو کہ لاٹھ کی محصلہ بلندی پر اس غلطی سے کیا اثر پڑے گا۔

صریحاً محسوب بلندی ف = م س ط

اگر مشاہدہ شدہ زاویہ ط اصلی زاویہ سے بقدر لہ کے زیادہ ہو تو

اصلی زاویہ ارتفاع = ط - لہ اس لئے

اصلی بلندی = ف = م س (ط - لہ)

اس لئے بلندی کی غلطی = ف - ف = م س لہ - م س (ط - لہ)

$$\left\{ \frac{\text{جب } \text{طہ} - \text{لہ}}{\text{جم } \text{طہ} - \text{لہ}} - \frac{\text{جب } \text{طہ}}{\text{جم } \text{طہ}} \right\} =$$

$$= \frac{\text{جب } \text{طہ}}{\text{جم } \text{طہ} - \text{لہ}}$$

اگر جم لہ کے مربع اور نیز لہ کی بڑی قوتوں کو نظر انداز کریں تو یہ

$$= \text{قط } \text{طہ} \times \text{لہ}$$

لہذا غلطی کو محسوب بلندی کے ساتھ نسبت

$$\text{لہ قط } \text{طہ} \text{ بے مس } \text{طہ} = \frac{\text{لہ}^2}{\text{جب } \text{طہ}}$$

چونکہ لہ بہت چھوٹا ہے اس لئے اگر جب ۲ طہ بھی چھوٹا نہ ہو تو یہ نسبت صریحاً بہت چھوٹی ہوگی۔ اور اس کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہوگی جبکہ جب طہ بڑا سے بڑا ہو یعنی ۲ طہ ۱۲ کے برابر ہو یعنی طہ = ۱۲ لیکن یہ نسبت بڑی ہوگی اگر طہ صفر کے یا ۱۲ کے قریب ہو۔

پس معلوم ہوا کہ اگر وہ زاویہ جو لاٹھ کے محاذی بنتا ہے صفر کے قریب ہو یا اگر زاویہ مذکورہ ۱۲ کے قریب ہو تو اس کی پائش میں خفیف سی غلطی بھی جواب میں نسبتاً بہت بڑی غلطی پیدا کرے گی۔

اگر طہ بہت چھوٹا ہو تو محصلہ بلندی یعنی ۱ مس طہ اور مطلق غلطی یعنی ۱ قط طہ  $\times$  لہ دونوں بہت چھوٹی ہونگی لیکن موخر الذکر اول الذکر کے مقابلہ میں نسبتاً بڑی ہوگی۔

اگر طہ ۱۰ کے قریب ہو تو ہر دو مقادیر بڑی ہونگی۔

مشق ۲۔ دفعہ ۱۹۸ حصہ اول کی طرح ایک برج کی بلندی معلوم کی گئی ہے۔ اگر اصلی زاویہ زاویہ عد سے جو پائش سے معلوم ہوا ہے بمقدار طہ کے کم ہو تو

بتاؤ کہ ہمیں محصلہ بلندی میں کیا تبدیلی کرنی پڑے گی۔

چونکہ عہ کی اصلی قیمت عہ - طہ ہے، اس لئے بلندی کی اصلی قیمت معلوم کرنے کے واسطے جواب میں عہ کی بجائے عہ - طہ لکھنا کافی ہوگا۔

$$\text{اس لئے اصلی بلندی} = \frac{\text{جب (عہ - طہ) جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ + طہ)}}$$

$$= \frac{\text{جب عہ جب طہ - جم عہ جب طہ}}{\text{جب (بہ - عہ) جم طہ + جم (بہ - عہ) جب طہ}}$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \times \frac{\text{ا - طہ مم عہ}}{\text{ا + طہ مم (بہ - عہ)}} = \dots\dots\dots \text{وفات ۳۲ اور ۳۳}$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \left[ \text{ا - طہ مم عہ} \right] \left[ \text{ا - طہ مم (بہ - عہ) + } \dots\dots\dots \right]$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \left[ \text{ا - طہ} \left\{ \text{مم (بہ - عہ) + مم عہ} \right\} \right]$$

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} - \frac{\text{ا جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \text{طہ}$$

اس لئے محصلہ بلندی اصلی بلندی سے بقدر طہ  $\frac{\text{ا جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$  کے زیادہ ہے۔

نیز ضاعلی کو محسوب بلندی کے ساتھ نسبت

$$\frac{\text{طہ جب بہ}}{\text{جب عہ جب (بہ - عہ)}} \text{ ہے۔}$$

مثق ۲ - ایک مثلث کے اضلاع ۱ = ۲، ۲ = ۳ اور ۳ = ۴ سے



$$\text{یعنی} \quad \frac{15}{14} \text{ ما } 3 = \frac{21}{43} \text{ لہ}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{15}{40} \text{ ما } 4 = \frac{21}{40} \text{ لہ} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{نیز جم (ج - ب) = } \frac{23 + 22}{3 \times 2 \times 2} = \frac{2(3 - 2)}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{15}{14} \text{ ما } 3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \text{ لہ}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{15}{35} \text{ ما } 8 = \frac{2}{5} \text{ لہ}$$

لہذا زاویوں 'ا' ب' ج میں اغلاط بالترتیب

$$\frac{11}{180} \text{ ما } 1 = \frac{21}{180} \text{ لہ} \quad \text{اور} \quad \frac{32}{180} \text{ ما } 15 \text{ لہ}$$

نیم قطریوں کی ہیں

یعنی سب سے کم غلطی سب سے چھوٹے زاوے میں ہے۔

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ہر سہ زوایا کی غلطیوں کا مجموعہ صفر ہے اور ہونا بھی یہی چاہیئے کیونکہ مشنٹ کے نینوں زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ دو قانونوں کے برابر ہوتا ہے۔ تیسرے زاویہ کی غلطی ہم اس اصول کی بنا پر بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

## ۱۲۲ مثلہ

۱۔ ایک ٹیلہ کے اوپر ایک مینار ہے جسکی بلندی ب ہے۔ مینار کی چوٹی اور قاعدہ کے ارتفاعی زاوے بالترتیب عہ اور ب مشاہدہ کئے گئے ہیں اور اس بنا پر ٹیلہ کی بلندی محسوب کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ عہ کی پیمائش میں طہ کی غلطی واقع ہوئے سے ٹیلہ کی اصلی بلندی فہ میں جو غلطی رونما ہوگی وہ محصلہ بلندی کا

ط x حجم بہ قط عہ قم (عہ - بہ) گنا ہوگی۔

۲ - ایک نقطہ سے جو مینار کے قاعدہ سے ۱۰۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر زاویہ ارتفاع کی پیمائش میں ۱° کی غلطی واقع ہوئی ہو اور طول کی پیمائش میں ۶ اینچ کی، تو بتاؤ کہ محصلہ بلندی میں چوٹی سے چھوٹی اور بڑی سے بڑی غلطیاں کیا پیدا ہو سکتی ہیں۔

۳ - اگر حصہ اول دفعہ ۲۰۲ کی مشق میں زاویہ عہ کی پیمائش میں غلطی نہ واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اس سے مینار اور جھنڈے کی محصلہ بلندیوں میں کیا غلطیاں رونما ہوں گی۔ اگر ۱۰۰۰ فٹ ۱ عہ = ۳۰ اور ۱۵۰ اور عہ کی قیمت میں ۱ کی غلطی ہو تو مطلوبہ غلطیوں کی عددی قیمتیں معلوم کرو۔

۴ - ا ب ایک عمودی لائٹ ہے اور ج د ایک ایسا افقی خط ہے کہ ج د محدودہ لائٹ کے قاعدہ ب میں سے گزرتا ہے، لائٹ کے عمودی ج اور د پر جو زاوے بنتے ہیں ان کے ماس بالترتیب  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{3}{4}$  ہیں۔ اگر ج د کا طول ۳۵ فٹ معلوم ہو تو لائٹ کی بلندی معلوم کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اگر د پر کے زاویہ ارتفاع کے مشاہدہ میں آ کی غلطی واقع ہو تو اس سے لائٹ کی محصلہ بلندی میں قریباً ایک اینچ کی غلطی رونما ہوگی۔

۵ - ایک مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ایک مقام ۱ پر عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اور ایک اور مقام ب پر جو مینار کے قاعدہ اور مقام ۱ کے واسطے والے افقی خط پر واقع ہے اور جبکہ فاصلہ ۱ سے ج ہے زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہو

اس طرح — مینار کی بلندی  $\frac{\text{ج جب عہ جب بہ}}{\text{جب (عہ - بہ)}}$  فٹ محسوب کی گئی ہے۔

اگر ا ب مینار کے قاعدہ اور ۱ کے واسطے والے خط پہ لٹا پا جائے بلکہ ایسی



مستند میں، پانچ۔ ۱۔ ہر متوازی الائن ہو اور ہر خوالہ خط کے ساتھ ایک چھوٹا زاویہ  
دہ بنائے تو بتاؤ کہ مینار کی بندی میں دوسرے مرتبہ کی چھوٹی مقدار تک صحت کرنے

کے لئے محسوب بندی میں سے مقدار ج جمع جب ۲۰ × طہ تفریق کرنی پڑیگی۔  
مجم بہ جب (ع۔ ہ۔ ج)

۷۔ تین نقاط 'ا' 'ب' 'ج' ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اور ایک اور نقطہ 'د'  
کا فاصلہ 'ب' سے اس مشاہدہ کی بنا پر محسوب کیا گیا ہے کہ

$$\angle ا د ب = \angle ب د ج = طہ$$

ثابت کرو کہ اگر طہ کے مشاہدہ میں ایک چھوٹی غلطی 'لہ' واقع ہو تو اس کی وجہ سے  
د ب کے مصلہ طول میں تقریباً

$$\frac{۲ - (ا ب + ب د) \times جب طہ}{(۲ - ا ب + ب د) \times (۲ - ا ب + ب د) \times طہ}$$

کی غلطی واقع ہوگی جہاں 'ا ب' = 'ا' اور 'ب ج' = 'ب'

۷۔ ایک مثلث کے تین اضلاع کی پیمائش کرتے وقت دو اضلاع 'ا' اور 'ب'  
کے طولوں میں دو چھوٹی غلطیاں بالترتیب 'لا' اور 'ما' واقع ہوئیں، ثابت کرو کہ  
زاویہ 'ج' میں '۱' -  $\frac{لا}{ب}$  -  $\frac{ما}{ج}$  کی غلطی واقع ہوگی نیز بتاؤ کہ باقی  
زاویوں میں کیا کیا غلطیاں واقع ہوں گی۔

۸۔ ایک مثلث 'ا' 'ب' 'ج' میں ذیل کی تقریباً قیمتیں دی گئی ہیں

$$ا = ۶۰^\circ \quad ب = ۵۰^\circ \quad ج = ۷۰^\circ$$

معلوم کرو کہ 'ا' کی دی ہوئی قیمت میں کتنی غلطی 'ج' کی محسوب قیمت میں اتنی ہی غلطی  
پیدا کرے گی جو 'ج' کی پیمائش میں 'د' کی غلطی سے پیدا ہوتی ہے

۹۔ ایک مثلث، ذیل کی قیمتوں کی بنا پر حل کیا گیا ہے

ج = ۱۵ ، ۱ = ۶۴ اور ب = ۲

ثابت کرو کہ ج کی قیمت میں ۱۰ کی غلطی واقع ہونے سے ب کی محسوب قیمت میں تقریباً ۶۶ و ۳۳ کی غلطی واقع ہوگی۔

- ۱۰۔ ایک مثلث کا زاویہ ۱ اور دو اضلاع ب اور ج معلوم ہیں، اگر زاویہ ۱ کی پیمائش میں ایک چھوٹی غلطی ط واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی بنا پر
- (۱) ب کی محصلہ قیمت میں غلط جب۔ جمع تم ۱۰ نیم قطریوں کی غلطی واقع ہوگی۔
- (۲) ۱ کی محصلہ قیمت میں ج جب ب ط کی غلطی واقع ہوگی۔
- (۳) اور مثلث مذکور کے محصلہ رقبہ میں اس کے ط مم لگنہ کی غلطی واقع ہوگی۔
- ۱۱۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱، ب اور ج میں بالترتیب ۱، ۱، ۱ کی غلطیاں ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان اضلاع کی بنا پر مثلث کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر محسوب کیا جائے تو اس میں

$\frac{1}{4} مم + مم ب مم ج [ (ا ق ط ۱ + ا ق ط ب + ی ق ط ج ) ]$

کی غلطی واقع ہوگی۔

- ۱۲۔ ایک مثلث کا رقبہ اس کے اضلاع کو ناچنے سے محسوب کیا گیا ہے، یہ معلوم ہے کہ کسی طول کی پیمائش میں انتہائی غلطی جو اصل کو کم یا زیادہ کر سکتی ہے اصلی طول کی ن گنی ہے جہاں ن بہت چھوٹا ہے، ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کے اضلاع حسب پیمائش ۱۱۰، ۱۰۸، ۹۹، گز ہوں اور ان کی بنا پر مثلث مذکور کا رقبہ محسوب کیا جائے تو اس رقبہ میں جس غلطی کے وقوع کا امکان ہے وہ زیادہ سے زیادہ رقبہ محصلہ کی ۳۳ ۱۳ و ۳۳ ن گنی ہو سکتی ہے۔

- ۱۳۔ پیمائش سے معلوم ہوا ہے کہ ایک مثلث کے تینوں اضلاع ایک دوسرے کے تقریباً مساوی ہیں، اگر پیمائش میں غلطی کسی پیمائشی کے محاط سے ایک فیصد ہو تو ثابت

کرو کہ بڑی سے بڑی غلطی جو ایک زاویہ کے محسوب کرنے میں واقع ہو سکتی ہے تقریباً ۸۰ ہے۔

۱۴۔ ایک مستوی مسطحی الاضلاع مثلث افقی سطح میں واقع ہے، مثلث کے ہر ایک کونے سے ایک پہاڑ کی چوٹی کے ارتفاعی زاویے مشاہدہ کئے گئے ہیں اگر ہر ایک زاویہ عدہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی

$$\frac{1}{3} \text{ مس عہ}$$

ہے جہاں و متساوی الاضلاع مثلث کا ایک ضلع ہے اگر ج پر کے ارتفاعی زاویے کی پیمائش میں ۸ کی غلطی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی اصلی بلندی

$$\frac{1}{3} \text{ مس عہ} \left[ 1 + \frac{1}{3} \text{ جب عہ جم عہ} \right] \text{ ہے}$$

جو طالب علم احصائے تفرقات سے واقف ہے وہ فوراً دیکھ سکتا ہے کہ باب ہذا کی بعض مثالیں محض تفرق کرنے سے زیادہ آسانی سے حل ہو سکتی ہیں مثلاً دفعہ ۱۴۸ کی مشق ۲ میں مینار کی بلندی لا

$$\frac{\text{ا جب عہ جب یہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} =$$

اگر مستقل ہو اور عدہ بدلے تو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{ز عہ}} = \frac{\text{ا جب یہ}}{\text{جم عہ جب (بہ - عہ) + جب عہ جم (بہ - عہ)}}$$

$$\therefore \text{مف لا} = \frac{\text{ا جب یہ}}{\text{جب (بہ - عہ) مف عہ}}$$

جس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ عدہ میں خفیف تبدیلی مف عہ واقع ہونے سے لا میں

ایک خفیف تبدیلی مع لا پیدا ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اشلہ ۲۲ مشق ۶ میں

$$\frac{ج ب + ۲ ب - ج}{۲ ب}$$

لیکن چونکہ ج مستقل ہے اسلئے تفرق کرنے سے

$$\frac{۲ ب + ۲ ب - ج ب + ۲ ب - ج ب}{۲ ب} = \frac{۲ ب + ۲ ب - ج ب + ۲ ب - ج ب}{۲ ب}$$

$$= \frac{۲ ب + ۲ ب - ج ب + ۲ ب - ج ب}{۲ ب}$$

$$= \frac{۲ ب + ۲ ب - ج ب + ۲ ب - ج ب}{۲ ب}$$

$$= \frac{۲ ب + ۲ ب - ج ب + ۲ ب - ج ب}{۲ ب}$$



# باب دوازدہم

## متفرق مسائل

### مساوات درجہ سوم کا حل

۱۴۹۔ مساوات درجہ سوم کی معیاری شکل یہ ہے

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

اس میں  $a$  کی بجائے  $-a$  رکھنے سے یہ مساوات

$$x^3 - (a+b)x^2 + (ab+c)x - abc = 0 \text{ ہو جاتی ہے}$$

یعنی ہو جاتی ہے  $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0 \dots\dots (1)$

گویا ہم درجہ سوم کی کسی مساوات کو مساوات (۱) کی شکل میں یعنی ایسی شکل میں جس میں  $x^3$  کی کوئی رقم نہ ہو تحویل کر سکتے ہیں۔

$$150۔ \text{مساوات } x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0 \text{ کا حل}$$

اس میں  $x = 1$  رکھنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$1 - 2 + 3 - 4 = 0 \dots\dots (2)$$

اب دفعہ ۱۰۷ کی روش سے ہمیشہ

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0 \text{ کا حل}$$

اس لئے  $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$  کا حل  $x = 1$  ہے  $\dots\dots (3)$

ظاہر ہے کہ مساوات (۲) اور (۳) دونوں دراصل ایک ہی مساوات ہیں

بشرطیکہ  $y = \text{مجموعہ } 3 \text{ فن} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$  اور  $\frac{1}{4} = \text{مجموعہ } 3 \text{ ط} = \text{ق} \text{ ن}$   
اس لئے  $n = \left(\frac{1}{4}\right) \times 3$

اور اس لئے حجم  $m$  ط =  $m$  ق  $(\frac{1}{m})$  ..... (۴)  
 مساوات (۴) ہمیشہ (بشرط ضرورت جداول کی مدد سے) حل ہو سکتی ہے اگر ف مثبت ہو اور  $m$  ق  $(\frac{1}{m})$  ..... ۱  
 یعنی اگر  $m$  ق  $(\frac{1}{m})$  ..... ۲

جو طالب علم نظریہ مساوات سے واقف ہے اس سے مخفی نہیں کہ یہ وہ صورت ہے جو  
کارڈن کے طریقہ سے حل نہیں ہو سکتی یعنی وہ صورت ہے جس میں کہ مساوات کی تینوں  
اسلیبیں حقیقی ہوں |

اگر چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو مسادات (۴) کو پورا کرے طہ ہو تو مقابیر  
 طہ =  $\frac{۱۹۲}{۳}$  اور طہ =  $\frac{۳۴}{۳}$  بھی مسادات مذکورہ کو پورا کر نیگی گویا مسادات  
 لا۳ = لا۲ + ق = ۰

کی صلیبیں  $\frac{1}{n}$  حجم طء،  $\frac{1}{n}$  حجم (طء +  $\frac{\pi^2}{3}$ ) اور  $\frac{1}{n}$  حجم (طء +  $\frac{\pi^2}{3}$ )  
یعنی ۲/۲ فٹ حجم طء، ۲/۲ فٹ حجم (طء +  $\frac{\pi^2}{3}$ ) اور ۲/۲ فٹ حجم (طء +  $\frac{\pi^2}{3}$ )  
ہونگی۔

۱۵- مشتق - مساوات  $(x^2 + 9 + 3) = 0$  کو حل کرو۔

لا = ما - ۲ رکھنے سے مساوات بالاحصا ذیل ہو جاتی ہے

$$= 1 + 63 - 76$$

اب اگر  $\frac{y}{x} = 1$  رکھا جائے تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \quad (1)$$

اور حجم ۳ طہ -  $\frac{۳}{۴}$  حجم طہ -  $\frac{۱}{۴}$  حجم ۳ طہ = ۰ ..... (۲)

(۱) اور (۲) دونوں دراصل ایک ہی مساوات ہے چونکہ اگر

ی = حجم طہ، ن =  $\frac{۱}{۴}$  اور -  $\frac{۱}{۴}$  حجم ۳ طہ = ن

یعنی اگر ن =  $\frac{۱}{۴}$

اور حجم ۳ طہ = -  $\frac{۱}{۴}$  = حجم ۲۰ ..... (۳)

مساوات (۳) کی اصلیں صریحاً حسب ذیل ہیں

$$۲۰ + ۲۰ + ۲۰ + ۲۰ = ۲۰ + ۲۰ + ۲۰ + ۲۰$$

اس لئے ی = حجم ۲۰ یا حجم ۱۰ یا حجم ۲۸۰

$$۱ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲$$

$$۸ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲$$

لا کی عددی قیمتیں جدولوں کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں۔

## ۲۳ مسئلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$(۱) ۲ - لا^۳ - ۳ - لا = ۱ = ۰ \quad (۲) لا^۳ + ۳ - لا^۲ = ۱ = ۰$$

$$(۳) لا^۳ - ۲ - لا - ۳۲ = ۰ \quad (۴) لا^۳ - ۶ - لا^۲ + ۶ - لا + ۸ = ۰$$

$$(۵) لا^۳ - ۲۱ - لا + ۷ = ۰ \quad (۶) لا^۳ + ۳ - لا^۲ + ۲ - لا = ۱ = ۰$$

$$(۷) لا^۳ - ۷ - لا + ۵ = ۰$$

اعظم اور اقل قیمتیں

۱۵۲۔ ایک مثلثی جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرنے کی ایک مثال

حصہ اول دفعہ ۱۳۹ میں درج کی گئی ہے۔ اس جگہ ہم ایک اور مثال حل کرتے ہیں۔

اگر دو مثبت زاوے لا اور ما ایسے ہوں کہ ان کا حاصل جمع ایک مستقل زاویہ  $(\angle ۲)$  کے برابر ہو تو بتاؤ کہ جب لا جب ما کی بڑی سے بڑی قیمت کب ہوگی، نیز یہ مسئلہ دو سے زیادہ زاویوں کی صورت میں کیا ہو جائے گا۔  
ظاہر ہے کہ  $۲$  جب لا جب ما  $۲$  جب لا جب (عہ - لا)

= جم (عہ -  $۲$  لا) - جم عہ

۱ سلسلے  $۲$  جب لا جب ما کی قیمت بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب

جم (عہ -  $۲$  لا) بڑے سے بڑا ہو یعنی اگر عہ  $= ۲$  لا

اس لئے لا = ما =  $\frac{۲}{۲}$

اس لئے حاصل ضرب مذکورہ بڑے سے بڑا اس وقت ہوگا جب لا زاوے

لا اور ما باہم مساوی ہوں۔

اب فرض کرو کہ تین زاوے لا، ما، ی ایسے ہیں کہ ان کا مجموعہ ایک

مستقل زاویہ  $(\angle ۳)$  کے مساوی ہے۔ اگر حاصل ضرب

جب لا جب ما جب ی

کے زاویوں میں سے کوئی دو زاوے مثلاً لا اور ما باہم مساوی نہ ہوں تو

ظاہر ہے کہ اگر ہم لا اور ما دونوں کی بجائے ان کے حاصل جمع کا نصف

لکھیں تو زاویوں کے حاصل جمع میں تو کوئی فرق نہ آئیگا لیکن حاصل ضرب

مذکورہ کی قیمت بڑھ جائے گی۔ اس لئے جب تک زاوے لا، ما اور ی

آپس میں برابر نہ ہو جائیں ہم ہمیشہ زاویوں کو بتدریج ایک دوسرے کے مساوی

کرنے سے نکل ضرب مذکورہ کی قیمت بڑھا سکتے ہیں۔ پس بڑی سے بڑی قیمت



اس وقت حاصل ہوگی جب لا، ما اور سی آپس میں برابر ہوں گے۔  
 زدایا لا، ما اور سی..... کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو صریحاً اسی قسم کا امثال  
 صادق آئے گا۔

۱۵۳۔ اب ہم بتا سکتے ہیں کہ بڑے سے بڑے رقبہ کا مثلث جو ایک اترہ  
 کے اندر بنایا جاسکتا ہے مثلث متساوی الاضلاع ہے۔ اگر دائرہ کا نصف  
 قطر سا ہو تو حصہ اول، امثالہ ۳۶ مشق ۱۰ کے بموجب مثلث کا رقبہ

$$= ۲ \times \text{ج} \times \text{ب} \times \text{ج} =$$

$$\text{ہوگا جہاں } ۱ + \text{ب} + \text{ج} = ۲۲ = \text{ایک مستقل زادیہ}$$

دفعہ ما قبل کی رو سے ظاہر ہے کہ یہ مثلث بڑے سے بڑا اس وقت ہوگا

$$\text{ج} = \text{ب} = ۱$$

۱۵۴۔ مشق۔ مقدار ۱ مس لا + ب مم لا کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت  
 قیمت معلوم کرو۔

$$\text{فرض کرو کہ } ۱ \text{ مس لا} + \text{ب} \text{ مم لا} = \text{ما}$$

$$\text{یعنی } ۱ \text{ مس لا} - \text{ما} \text{ مس لا} + \text{ب} = ۰$$

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$\text{مس لا} = \frac{\text{ما} \pm \sqrt{\text{ما}^2 - ۴ \times ۱ \times \text{ب}}}{۲}$$

$$۲$$

چونکہ مس لا حقیقی ہے اس لئے علامت جذر کے اندر جو مقدار ہے وہ

مثبت ہونی چاہیئے یعنی ضرور ہے کہ  $\text{ما}^2 \geq ۴ \times ۱ \times \text{ب}$

اس لئے ما کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۲ ب ہے اور اس قیمت کے

جواب میں مس لا کی قیمت  $\frac{\text{ما} - ۲ \times \text{ب}}{۲}$  ہے۔

## امثلہ ۲

۱۔ اگر لا + ما ایک دیا ہوا زاویہ ہو جو ۴ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جب لا + جب ما (۲) جم لا جم ما

دونوں کی بڑی سے بڑی قیمتیں اس وقت ہونگی جب لا = ما

۲۔ اگر لا + ما = ایک دیا ہوا زاویہ  $\frac{3}{4} > \frac{3}{4}$  تو ثابت کرو کہ

جم لا + جم ما اور جم لا + جم ما

دونوں کی بڑی سے بڑی قیمتیں اس وقت ہونگی جب لا = ما

مندرجہ ذیل رقوم کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں دریافت کرو۔

$$۳۔ \frac{۲ \text{ جم ط}}{۳ \text{ ما ط}} + \frac{۲ \text{ جم ط}}{۳ \text{ ما ط}} - ۴۔ \text{قط ط} - \text{ب مس ط}$$

$$۵۔ \frac{\text{قم ط} - \text{مم ط}}{\text{قم ط} + \text{مم ط}} - ۶۔ \text{لا جب ط} + \text{ب ط} - \text{قم ط}$$

$$۷۔ \text{لا قط ط} + \text{ب ط} - \text{قم ط}$$

اگر لا + ما کی قیمت ہمیشہ ایک دئے ہوئے زاویہ ۲ ع کے مساوی ہو جہاں

۲ ع کم ہے ۴ سے تو ذیل کے جلوں کی کم سے کم قیمتیں دریافت کرو

$$۸۔ \text{مس لا مس ما} - ۹۔ \text{قط لا} + \text{قط ما}$$

ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\left[ \frac{\text{جم (ع-لا)} + \text{جم (ع-لا)}}{\text{جم (ع-لا)}} + \frac{\text{جم (ع-لا)}}{\text{جم (ع-لا)}} \right] \text{جم ع}$$

$$۱۰۔ \text{اگر لا + ما = ع جہاں ع} \frac{3}{4} > \frac{3}{4} \text{، تو معلوم کرو کہ مس لا مس ما کی}$$

قیمت بڑی سے بڑی کب ہوگی۔

$$[۱۔ مس لا مس ما = \frac{۲ جم ع}{جم د ع - ۲ لا}]$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا مثلث جس کے اضلاع کا مجموعہ ایک دی ہوئی مقدار کے برابر ہو مساوی الاضلاع ہوتا ہے۔

[ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ایک مثلث کا رقبہ =  $\frac{۱}{۲}$  مس پ مس پ مس ج [جہاں ن = نصف محیط

۱۲۔ اگر لا، ما، می ..... ایسے زاوے ہوں جنکا حاصل جمع ایک دئے ہوئے زاویہ کے مساوی ہو اور نیز ان زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ مثبت ہو اور زاویہ قائمہ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب جم لا جم ما جم می ..... کی قیمت بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب سب زاوے باہم مساوی ہوں۔

۱۳۔ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مقادیر جب ا + جب ب + جب ج اور جب ا جب ب جب ج کی قیمتیں بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب مثلث مساوی الاضلاع ہو۔

۱۴۔ ایک حادہ الزویا مثلث کا مثلث پائین کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث پائین کا رقبہ اول الذکر مثلث کے رقبہ کے ایک چوتھائی سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔

۱۵۔ ا ب ج ایک مثلث ہے، ثابت کرو کہ مقدار

$$جم ا + جم ب + جم ج$$

کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت -  $\frac{۳}{۲}$  ہے، نیز ثابت کرو کہ جم ا + جم ب + جم ج ہمیشہ ایک سے بڑا ہوگا اور  $\frac{۳}{۲}$  سے بڑا نہیں ہوگا۔

۱۶۔ اگر ا ب ج ایک مثلث ہو تو ثابت کرو کہ ہر دو مقادیر

$$م ا + م ب + م ج$$

اور مم<sup>۱</sup> + مم<sup>۲</sup> ب + مم<sup>۳</sup> ج  
کی قیمتیں چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہونگی جبکہ مثلث مذکور مساوی الاضلاع ہو۔

## مقاریر ملحق کی ہندی تعمیر

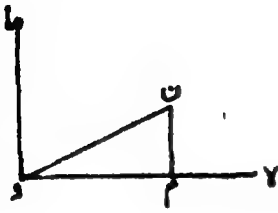
۱۵۵۔ حصہ اول باب چہارم میں بتایا جا چکا ہے کہ اگر کوئی فاصلہ کسی خاص سمت میں (مثلاً افق کے متوازی دائیں جانب) ناپا جائے اور اس فاصلہ کو اسے تعمیر کیا جائے تو اتنا ہی فاصلہ جو اول الذکر سمت کی مقابل سمت میں (یعنی افق کے متوازی بائیں جانب) ناپا جائے گا وہ ۱ سے تعمیر ہوگا۔

اس لئے ۱ کے قبل منفی علامت (-) ثبت کر لیا وہی نتیجہ ہوتا ہے گویا ۱ (ملاحظہ ہو حصہ اول دفعہ ۵۳ کی شکل) کو مثبت سمت میں دو قائموں میں سے گھما دیا گیا ہے گویا ۱ پر (-۱) کا عمل عائد کرنے کے یہ معنی ہیں کہ ۱ کو دو قائموں میں سے مثبت سمت میں گھمایا گیا ہے۔

۱۵۶۔ اب  $1-1 \times 1-1 = 1$ ، اس لئے عمل  $1-1$  کے لئے جو معنی بھی تجویز کئے جائیں وہ ایسے ہونے چاہئیں کہ کسی مقدار پر یہ عمل دو دفعہ کرنے سے وہی نتیجہ مترتب ہو جو اسی مقدار پر ۱-۱ کا عمل ایک دفعہ کرنے سے مترتب ہوتا ہے۔

پس ہم عمل  $1-1$  سے یہ ارادے سکتے ہیں کہ یہ کسی طول کو ایک زاویہ قائمہ میں سے (بسمت مثبت) گھما دیتا ہے۔ اس لئے کسی طول ۱ پر  $1-1$  کا عمل دو دفعہ کرنے کے یہ معنی ہونگے کہ اس طول ۱ کو بسمت مثبت دو قائموں میں سے گھمایا گیا ہے۔ لہذا ان معنوں کے مطابق  $1-1$  ۱ سے ایک خط مراد ہے

جو اس خط پر عود ہے جو ا سے تعبیر ہوتا ہے -



۱۵۷ - اب ہم یہ بتا سکتے ہیں کہ

مقدار لا + ما - ا سے کیا مراد ہے

دو خط ولا اور و ما کھینچو جو ایک

دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں، ولا

پر ایک فاصلہ و م = لا نا پو، م سے م ن، و ما کے متوازی کھینچو اور

اس کو ما کے مساوی بناؤ۔ تب م ن، ما - ا کو تعبیر کرتا ہے، پس

مقدار لا + ما - ا ما گو یا نقطہ ن سے تعبیر ہوتی ہے۔

یا ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ خط و ن اس ملتف مقدار کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{ظاہر ہے کہ } و ن = و م + م ن = و لا + ما$$

$$\text{اور } م و ن = م ن = \frac{م ن}{و م} = م س - ا$$

لہذا طول و ن، مقدار لا + خ ما کے مقیاس کو تعبیر کرتا ہے اور زاویہ

م و ن مقدار مذکور کے اہتزاز کی قیمت خاص کو (دفعہ ۱۸) تعبیر کرتا ہے۔

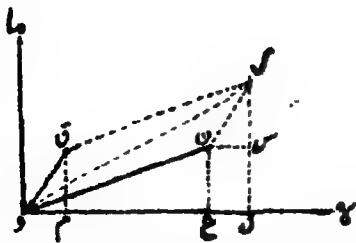
۱۵۸ - دو ملتف مقداروں کو جمع کرنا

فرض کرو کہ و ن مقدار لا + خ ما

کو تعبیر کرتا ہے اور و ق، ای + خ مے

کو یعنی و ع = لا، ع ن = ما،

و م = ی اور م ق = مے



متوازی الاضلاع و ن س ق

کی تکمیل کرو، ولا پر عمود سال اور سال پر عمود ن س کھینچو۔

چونکہ ن س، وق کے مساوی اور متوازی ہے

اس لئے  $غل = ن س = وم$  اور  $س س = م ق$

لہذا  $ول = وع + غل = لا + ی$

اور  $ل س = ل س + س س = ما + مے$

اسلئے  $وس$ ، مقدار مثلث

$لا + ی + خ (ما + مے)$  کو تعبیر کرتا ہے۔

اسلئے دو مثلث مقداروں کا مجموعہ اس متوازی الاضلاع کی قطع سے تعبیر ہوتا ہے

جس کے دو متصل اضلاع مذکورہ مقادیر کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۵۹۔ فرض کرو کہ  $لا + خ ما = ر$  (جم ط + خ جب ط) بموجب دفعہ ۱۸

تب (جم ع + خ جب ع)  $(لا + خ ما)$

$= ر$  (جم ع + خ جب ع) (جم ط + خ جب ط)

$= ر$  [جم ع + ط + خ جب ع + ط] ..... (۱)

اب ان معنوں کے بموجب جو مثلث مقادیر کے لئے اوپر تجویز کئے جا چکے

ہیں

$ر$  [جم ط + خ جب ط]

سے مراد ایک ایسا خط ہے جس کا طول  $ر$  ہے اور جو ولا سے زاویہ ط بنا رہے

نیز حسب  $ر$  [جم ع + ط + خ جب ع + ط]

سے مراد  $ر$  طول کا ایک خط ہے جو ولا سے زاویہ ع + ط بنا رہا ہے (دفعہ ۱۵۷)

اسلئے مساوات (۱) کی رو سے  $لا + خ ما$  کو جم ع + خ جب ع سے

ضرب دینے کے گویا یہ معنی ہیں کہ اس خط کو جو لا + خ ما سے تعبیر ہوتا ہے ایک زاویہ عم میں سے گھما دیا گیا ہے۔

۱۶۰۔ ڈی مائیرے کے مسئلہ کی ہندسی تعبیر

مقدار (جم عم + خ جب عم) (جم بہ + خ جب بہ) (جم جم + خ جب جم) (جم لہ + خ جب لہ) سے یہ مراد ہے کہ ایک خط کو جو نجم لہ + خ جب لہ سے تعبیر ہو پہلے زاویہ جم پھر زاویہ بہ اور بالآخر زاویہ عم میں سے گھمایا گیا ہے۔ یعنی فی الجملہ زاویہ عم + بہ + جم میں سے گھمایا گیا ہے۔ لیکن اس موخر الذکر مجموعی عمل سے جو خط حاصل ہوگا وہ وہی ہوگا جو

[جم (عم + بہ + جم) + خ جب (عم + بہ + جم)] (جم لہ + خ جب لہ)

سے تعبیر ہوتا ہے۔

یہی استدلال زدایا کی کسی تعداد پر صادق آئیگا۔ اسلئے ڈی مائیرے کا مسئلہ جبریہ طرز میں محض اس ہندسی امر واقعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ ایک خط کو یکے بعد دیگرے مختلف زاویوں میں سے گردش دینے سے وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو اس خط کو ایک دم اُن زاویوں کے مجموعہ میں سے گردش دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مشق یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ عدد ۱ کے تین جذور الکعب حسب ذیل ہیں

جم ۰ + خ جب ۰ ، جم  $\frac{112}{3}$  + خ جب  $\frac{112}{3}$  ، جم  $\frac{112}{3}$  + خ جب  $\frac{112}{3}$  اسلئے

(جم ۰ + خ جب ۰) (جم ۰ + خ جب ۰) (جم ۰ + خ جب ۰) = ۱

(جم  $\frac{112}{3}$  + خ جب  $\frac{112}{3}$ ) (جم  $\frac{112}{3}$  + خ جب  $\frac{112}{3}$ ) (جم  $\frac{112}{3}$  + خ جب  $\frac{112}{3}$ ) = ۱

اور  $\text{جم}(\frac{۲۴}{۳}) + \text{خ}(\text{جب} \frac{۲۴}{۳}) (\text{جم} \frac{۲۴}{۳} + \text{خ}(\text{جب} \frac{۲۴}{۳})) = ۱$   
 ان مساواتوں میں سے پہلی مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو تین بار صغر  
 زاویہ میں سے گردش دینے سے وہی خط حاصل ہوتا ہے۔  
 دوسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو مسلسل تین بار زاویہ  $\frac{۲۴}{۳}$  میں  
 سے (یعنی فی الجملہ زاویہ  $۲۴$  میں سے) گردش دینے سے وہی خط حاصل ہوتا ہے۔  
 تیسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو مسلسل تین بار زاویہ  $\frac{۲۴}{۳}$   
 میں سے (یعنی فی الجملہ  $۲۴$  میں سے) گردش دینے سے وہی ابتدائی خط حاصل  
 ہوتا ہے۔

یہ سب امور صریحاً درست ہیں۔

### ۱۶۱۔ دو ملقف مقداروں کو ضرب دینا

اگر  $\text{لا} + \text{خ} = \text{ر}$  (جم طہ + خ جب طہ)  
 اور  $\text{ی} + \text{خ} = \text{س}$  (جم فہ + خ جب فہ)  
 تو  $(\text{لا} + \text{خ})(\text{ی} + \text{خ}) = \text{ر س}$  (جم طہ + خ جب طہ) (جم فہ + خ جب فہ)  
 $= \text{ر س}$  [جم (طہ + فہ) + خ جب (طہ + فہ)]

پس ایک ملقف مقدار لا + خ ما کو دوسری ملقف مقدار ی + خ سے  
 سے ضرب دینے کے ہندی معنی یہ ہیں کہ اس خط کو جولا + خ ما سے تعبیر  
 ہوتا ہے زاویہ فہ

[یعنی س - ا - ی]

میں س کو گھمایا گیا ہے اور اس کے طول کو نسبت





۷۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} & \text{جب } n \text{ ذبح } n \text{ ذہ} + n \text{ جب } n^1 - \text{ذبح } (n-1) \text{ طہ جب } (n-1) \text{ ذہ} \\ & + \frac{n(n-1)}{2} \text{ جب } n^2 - \text{ذبح } (n-2) \text{ طہ جب } (n-2) \text{ ذہ} + \dots + \text{جب } n^{\text{طہ}} (n-1) \text{ ذہ} \\ & = \text{جب } n \text{ طہ } n \text{ ذہ} \end{aligned}$$

۸۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\begin{aligned} & \text{لان جب } n \text{ طہ} - n \text{ لان}^1 - \text{اجب } (n \text{ طہ} + n \text{ ذہ}) \\ & + \frac{n(n-1)}{2} \text{ لان}^2 - \text{اجب } (n \text{ طہ} + 2n \text{ ذہ}) - \dots - n(n+1) \text{ رقوم} = 0 \\ & \text{کی اصلیں مساوات لان جب } (n \text{ طہ} + n \text{ ذہ} - k \frac{n}{2}) \text{ قم } (n \text{ طہ} - k \frac{n}{2}) \\ & \text{سے حاصل ہوتی ہیں جہاں } n \text{ سے مراد کوئی صحیح عدد ہے اور } k \text{ کی قیمت} \\ & \text{صفر سے } n - 1 \text{ تک کوئی صحیح عدد ہے۔} \\ & ۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ لا متناہی$$

$$\text{جب } n \text{ طہ} + \frac{1}{4} \text{ جب } n^2 \text{ طہ} + \frac{3 \times 1}{3 \times 2} \text{ جب } n^3 \text{ طہ} + \dots$$

کی قیمت طہ کے مساوی ہے جہاں طہ کوئی حادہ زاویہ ہے، اور بالعموم اگر  $n$  کا انتخاب اس طرح کیا جائے کہ مقدار  $n + (1 - n) \text{ طہ}$  کی قیمت  $\frac{n}{2}$  اور  $\frac{n}{2} + \dots$  کے درمیان ہو تو سلسلہ بالا کی قیمت  $n + (1 - n) \text{ طہ}$  ہوگی۔

۱۰۔ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جس کا نصف قطر ایک ہے اور اس دائرہ کے محیط کو  $n$  مساوی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ان قوسوں کے وتروں پر قائم الزاویہ متساوی الساقین مشلف بنائے گئے ہیں جن کے راس باہر کی جانب ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان مثلثوں کی تعداد کو لا انتہا بڑا دیا جائے تو

ان راسوں کے جوفاصلے دائرہ کے مرکز سے ہوں گے ان سب کے حاصل ضرب کی انتہا نو چھ ہوگی جہاں عد سے مراد وہ زاویہ ہے جو قوس کے محاذی مرکز پر بنتا ہے۔  
 ۱۱۔ ایک دائرہ کے اندر جبکہ نصف قطر  $\frac{1}{2}$  ہے ان اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے، دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ ق سے دائرہ کا محاس کھینچا گیا ہے اور کثیر الاضلاع کے اضلاع اس محاس کو نقاط  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{5}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{7}$ ،  $\frac{1}{8}$ ،  $\frac{1}{9}$ ،  $\frac{1}{10}$  پر ملنے ہیں ثبات کرو کہ حاصل ضرب  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{10}$  اگر ن جفت ہو، اس میں ط سے مراد وہ زاویہ ہے جو ق اور کثیر الاضلاع کے ایک راس کے خط واصل کے محاذی دائرہ کے محیط پر بنتا ہے۔

۱۲۔ ایک دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ ق ہے۔ دائرہ کے اندر ان اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{5}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{7}$ ،  $\frac{1}{8}$ ،  $\frac{1}{9}$ ،  $\frac{1}{10}$  بنایا گیا ہے جہاں راس  $\frac{1}{2}$  وہ نقطہ ہے جو نقطہ ق کے قریب ترین ہے۔ اگر وتر ق  $\frac{1}{2}$ ، ق  $\frac{1}{3}$ ، ق  $\frac{1}{4}$ ، ق  $\frac{1}{5}$ ، ق  $\frac{1}{6}$  کے طول بالترتیب ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج، ج ہوں تو ثبات کرو کہ مقدار

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

کی قیمت ق کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۱۳۔ ایک دائرہ کے نصف قطروں کا ایک سلسلہ دائرہ کے محیط کو  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{5}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{7}$ ،  $\frac{1}{8}$ ،  $\frac{1}{9}$ ،  $\frac{1}{10}$  حصوں میں تقسیم کرتا ہے اور محیط پر کے کسی دئے ہوئے نقطہ سے ان سلسل نصف قطروں پر عمود کھینچے گئے ہیں ثبات کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{10}$$

ہوگا جہاں ر دائرہ مذکور کا نصف قطر ہے اور ط ان دو نصف قطروں کا درمیانی زاویہ ہے جن میں سے ایک تو محیط پر کے دئے ہوئے نقطہ کو مرکز سے وصل کرتا ہے۔

اور دوسرا مذکورہ بالا ن نصف قطروں میں سے پہلا یا آخری نصف قطر ہے۔

۱۴۔ اگر ایک دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع بنایا جائے اور اُس دائرہ کا طول جو محیط پر کے کسی ثابت نقطہ کو کثیر الاضلاع کے ایک رأس سے وصل کرے ل ہو تو ثابت کر دو کہ

$$\text{مح ل}^2 = \text{ن} \left\{ \frac{\text{ل}^2}{2} \right\}$$

۱۵۔ ایک دائرہ کے اندر جبکا مرکز و ہے اور نصف قطر و ہے ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د ..... بنایا گیا ہے۔ کثیر الاضلاع کے سب رأسوں سے ایک خط پر جو و پر عمود ہے اور جس کا فاصلہ مرکز و سے ب (ک ل) ہے عمود کیلئے گئے ہیں ثابت کر دو کہ ان عمود کا حاصل ضرب

$$\text{ب}^2 [\text{جم}^2 (\frac{1}{2} \text{جب}^2 \frac{1}{2}) - \text{جب}^2 (\frac{1}{2} \text{جب}^2 \frac{1}{2})] =$$

۱۶۔ ثابت کر دو کہ مساوات ط = جم ط سے ط کی ایک اور صرت ایک ہی قیمت حاصل ہوتی ہے اور یہ قیمت  $\frac{3}{4}$  سے کم ہے۔

۱۷۔ ثابت کر دو کہ ط کی عام قیمت جو مساوات

(جم ط + خر جب ط) (جم ط + خر جب ط) ..... ن اجزائے ضربی تک = ۱ کو پورا کرتی ہے،  $\frac{3}{4} \text{ن} (\text{ن} + ۱)$  ہے جہاں م سے مراد کوئی صحیح عدد ہے۔

۱۸۔ ثابت کر دو کہ  $\text{نو}^2 + \text{نو} = ۲ + ۱ \{ ۲ + ۱ \} \{ ۲ + ۱ \} \{ ۲ + ۱ \} \dots$  تا لامتناہی

۱۹۔ ثابت کر دو کہ  $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} + \dots$  تا لامتناہی

$$= \frac{۱}{۲} [\text{نو}^2 + ۲ \text{نو} - \frac{۱}{۲} \text{جم} (\frac{۳}{۲} \text{لا})]$$

$$۲۰۔ ثابت کرو کہ لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۴}{۴} + \frac{لا^۶}{۶} + \dots تا لا تا ہی$$

$$= \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \dots (جم لا \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} - \dots)$$

۲۱۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\left[ \frac{۱}{۲(۱+۳)} + \frac{۱}{۴(۱-۳)} \right]^\infty$$

کا حاصل جمع  $\frac{۲۸}{۴۲۹} - ۱$  ہے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \frac{۱}{۲۵۶} + \dots + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \frac{۱}{۲۵۶} + \dots$$

$$۸ = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \frac{۱}{۲۵۶} + \dots + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \frac{۱}{۲۵۶} + \dots$$

۲۳۔ اگر  $\frac{۱}{۲} =$  تو ثابت کرو کہ جملات

$$جم ۱ + جم ۵ + جم ۱۷$$

$$اور جم ۱۱ + جم ۱۳ + جم ۱۹$$

کی قیمتیں بالترتیب  $\frac{۱}{۲}$  اور  $\frac{۱}{۲}$  ہیں۔

$$۲۴۔ ثابت کرو کہ مس ۵ + مس ۱۱ + مس ۱۳ + مس ۱۹ =$$

$$+ مس ۵ + مس ۱۱ + مس ۱۳ + مس ۱۹ =$$

۲۵۔ ثابت کرو کہ جس مساوات کی اصلیں مس  $\frac{۱}{۱۵}$  ہیں (جہاں ریشول

ا کے کوئی عدد ہے جو ۱۵ سے کم ہے اور بلحاظ ۱۵ کے مفرد ہے) وہ یہ ہے

$$لا - ۹۲ لا^۲ + ۱۳۴ لا^۳ - ۲۸ لا^۴ + ۱ = ۰$$

۲۶۔ سلسلہ جب ۲ -  $\frac{۱}{۲}$  جب ۴ -  $\frac{۱}{۴}$  جب ۶ -  $\frac{۱}{۶}$  تا لا تا ہی



ثابت کرو کہ

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_n + r_{n-1}} = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{n-1}} + \dots + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1 - r_2}$$

ہاں لا، کثیر الاضلاع کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، اس دائرہ کے مرکز اور ن کے مابینی فاصلہ کو تغییر کرتا ہے اور ط سے مراد وہ زاویہ ہے جو خط ون، کسی زاویہ کے رأس اور مرکز کو ملانے والے خط سے بنتا ہے۔

۳۲۔ اگر ط + ف + پ = ۳۲ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ط} + \text{جم ف} + \text{جم پ} = ۲ \text{ جم ط} + \text{جم ف} + \text{جم پ} = ۱$$

اس سے ان چھ خطوط کے طولوں کا باہمی ربط مستنبط کرو جو چار ہم سطح نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔



## مزید متفرق مثالیں

۱۔ اگر  $(ا + خ ب)$   $(ا + خ ب)$   $(ا + خ ب)$  .....  $(ا + خ ب)$   $= ا + خ ب$   
 تو ثابت کرو کہ  $مس - \frac{ا}{۱} - \frac{ب}{۲} + مس - \frac{ا}{۲} - \frac{ب}{۳} + مس - \frac{ا}{۳} - \frac{ب}{۴} + \dots$   
 $\dots + مس - \frac{ا}{ن} - \frac{ب}{ن} = مس - \frac{ا}{۱} - \frac{ب}{۱}$  [ڈی مائر کا مسئلہ استعمال کرو]

۲۔ اگر لا چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$لوک جب لا = لوک لا - \frac{لا}{۴} - \frac{لا}{۱۸۰}$$

۳۔ ثابت کرو کہ  $جیز (ب - ج) + جیز (ج - د) + جیز (د - ہ) =$

$$۲ = جیز \frac{۲}{۳} - جیز \frac{۲}{۴} - جیز \frac{۲}{۵}$$

۴۔ ثابت کرو کہ کسی زاویہ ط کا قوسی ٹاپ ایک مستقل مقدار اور ذیل کے دو سلسلوں میں سے ایک کے حاصل جمع کے مساوی ہے:

$$مس ط - \frac{۱}{۳} مس ط + \frac{۱}{۵} مس ط - \dots$$

$$- مم ط + \frac{۱}{۳} مم ط - \frac{۱}{۵} مم ط + \dots$$

دونوں صورتوں میں تیز کرو اور ۲۹ ، ۲۰۰ کے زاویوں کے لئے مستقلوں کی مقدار معلوم کرو۔

$$۵۔ سلسلہ ۱ - \frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۳} - \frac{لا}{۴} + \dots تا لامتناہی کو جمع کرو$$

$$۶۔ ثابت کرو کہ  $مخر - لا = \frac{۱}{۴} لوک - \frac{۱ + لا}{۱ - لا}$$$



نیز مزہ ۱- لا کو لا کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ  
۷- ثابت کر دو کہ

جب ن عم + ق جب (ن-۱) عم  
۲ جم عم - ۲ جم عم - ۲ جم عم - ۲ جم عم + ق جب (ن+۱) عم + ق جب ن عم  
جہاں دائیں جانب کے خارج قسموں کی تعداد ن ہے۔ (استقراسے کا طریقہ استعمال کرو)

۸- ثابت کر دو کہ ن حادہ زاویوں کی جیب التمام ہی ہندسی اوسط ان  
زاویوں کی حسابی اوسط کی جیب التمام سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی۔  
۹- ۸۸ + ۱۶ = ۱۰۴ کے تمام جذور الکعب محسوب کرو، یہ معلوم ہے کہ  
جب س ط = ۲ تو مس ۳ ط =  $\frac{۲}{۱۱}$

۱۰- اگر لا گھٹتے گھٹتے صفر ہو جائے تو  $\frac{قوبلا - قوبلا - ۲ مس لا}{مس لا - لا}$  کی

انتہائی قیمت معلوم کرو۔  
۱۱- ثابت کر دو کہ

$$(۱) مس ا = \left[ \frac{ب - لا}{ب + لا} مس لا \right] = \frac{ب + لا جم لا}{ب + لا جم لا}$$

$$(۲) لوک = \frac{لا + ب + لا}{لا + ب - لا} مس لا = \frac{ب + لا جم لا}{ب + لا جم لا}$$

۱۲- صفر سے ۱۱ تک لا کی سب قیمتوں کے لئے سلسلہ

$$\frac{۲}{۳ \times ۱} جب ۲ لا - \frac{۴}{۵ \times ۳} جب ۴ لا + \frac{۶}{۷ \times ۵} جب ۶ لا - \dots \dots \dots$$



$$\frac{1}{+92} + \frac{1}{+92} + \frac{1}{+92} \dots \dots \dots ۳ لاتناہی$$

$$= (جم ۲ ط ۱) - جم ط + ۱ - [ (جم ط - جم ۱ ط) - ۱ ] - جب ط$$

۱۸۔ سنیس کا ضابطہ ثابت کرو یعنی یہ ثابت کرو کہ اگر لا چھوٹا ہو تو لا اور

$$\frac{۳ جب ۲ لا}{(جم ۲ لا)} \text{ کا فرق تقریباً } \frac{۳ لا ۵}{۴۵} \text{ ہوتا ہے۔}$$

$$۱۹۔ ثابت کرو کہ مس ۱ (خ لا ۱) = \frac{۱}{۲} - \frac{خ}{۲} \text{ رک } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۰۔ سلسلہ \frac{۶}{۵ \times ۳ \times ۱} + \frac{۱۹}{۹ \times ۷ \times ۵} + \frac{۳۱}{۱۳ \times ۱۱ \times ۹} + \dots \dots \dots$$

حاصل جمع لاتناہی تک محسوب کرو، اس میں شمار کنندے سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔  
(دفعہ ۹۴ میں ط کو ۳ کے مساوی رکھو)

$$۲۱۔ سلسلہ \frac{جم ط}{۲ \times ۱} + \frac{جم ۲ ط}{۳ \times ۲} + \frac{جم ۳ ط}{۴ \times ۳} + \dots \dots \dots \text{ کا حاصل جمع}$$

لاتناہی تک معلوم کرو۔

$$۲۲۔ سلسلہ مس ع + مس ۲ ع + مس ۲ ع + مس ۲ ع + \dots \dots \dots \text{ کی ن}$$

رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$۲۳۔ \frac{جب ط}{جب ع جم ط} \text{ کو ط کے افغان کی جیوب کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔}$$

$$۲۴۔ سلسلہ \frac{۱ + ن}{(ن + ۱)(ن + ۲)(ن + ۳)} \text{ کا حاصل جمع}$$

معلوم کرو۔

(اس کو کسور جزوی میں تحلیل کرو اور اخذہ ۲۱ مشق ۷ کے ربط سے کام لو)



۱۴۰ - جب (عہ - ہ) + جب (ہ - جہ) + جب (جہ - عم) کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

[ایک مثلث ا ب ج کے بڑے سے بڑا قعر پر غور کرو جبکہ مثلث ایک ایسے دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے جسکا مرکز وہی ہے اور خطوط و ا، و ب، و ج ایک ثابت خط مستقیم کے ساتھ زاوے عہ، ہ، جہ بناتے ہیں]

۱۴۱ - مساوات متانثلہ  $\frac{1}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{1}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{1}{(ج-ا)(ج-ب)} = \frac{1}{(ج-ب)}$  سے ذیل کے متانثلات مستنبط کرو :-

۱ -  $\sum$  جم ۳ (عہ + طہ) جب (ہ - جہ)

$= ۳$  جم (۳ طہ + عہ + ہ + جہ) جب (ہ - جہ) جب (جہ - عم) جب (عم - ہ)

۲ - جب ۲ (عہ + طہ) جب (ہ - جہ)

$= ۳$  جب (۳ طہ + عہ + ہ + جہ) جب (ہ - جہ) جب (جہ - عم) جب (عم - ہ)

[۱ = جم (۲ عہ + ۲ طہ) + خ جب (۲ عہ + ۲ طہ)، ..... رکھو]

۳ - ثابت کرو کہ  $\frac{۱}{۱۵}$  کا فرق ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ اور ۸ جب ۱۵ - ۱ کا فرق ساتویں مرتبہ کی مقدار سے بھی کم ہے۔

۴ - اگر ایک مستدیر قوس کے وتر کا طول ۱ ہو اور اس قوس کے نصف کے وتر کا طول ب ہو تو ثابت کرو کہ قوس کا طول تقریباً  $\frac{۸}{۳} - \frac{۱}{۱۵}$  ہے۔

اگر قوس مذکور کے ایک ربع کے وتر کا طول ج ہو تو ثابت کرو کہ قوس کے طول کی نسبتاً زیادہ صحیح قیمت  $\frac{۳۰ - ۱}{۲۵۶} + \frac{۱}{۲۵۶}$  ہوگی۔

اگر قوس ایک ربع ہو تو ثابت کرو کہ ان سے ۲ کی قیمتیں بالترتیب عشریہ کے دوسرے اور پانچویں مقام تک صحیح نکلتی ہیں۔

۳۶ - اگر لوک، لوک، (لا + ما) = ف + خق تو

$$m = \text{لا مِس} [\text{مِس ق لُوك} \text{ مِلا} + \text{مِا}]$$

$$\frac{\text{جمہٴ ۵}}{۵} + \frac{\text{جمہٴ ۳}}{۳} = \text{جمہٴ ۸}$$

۳۷۔ ثبوت کرو کہ۔

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\dots\dots\dots - \frac{\text{جم ٥ ط}}{٥} + \frac{\text{جم ٣ ط}}{٣} - \text{جم ط}$$

$$\dots\dots\dots - \frac{\text{جم ۲ ط}}{۲} + \frac{\text{جم ۲ ط}}{۲} - ۱$$

۹۳. سلسلہ حبیب طہ قط ۳ طہ + حبیب ۳ ورق قط ۳ طہ + حبیب ۳ طہ قط ۳ طہ + ..... +

...تایان رقوم کو جمع کرے۔

۳۹۔ ایک شلٹ اب ج میں اگر ب  $\rightarrow$  آ تو ثابت کرو کہ

$$(1) \text{ ب} = \frac{\text{ب}}{1} + \frac{\text{ب}}{2} + \frac{\text{ب}}{3} + \frac{\text{ب}}{4} + \frac{\text{ب}}{5} + \frac{\text{ب}}{6} + \frac{\text{ب}}{7} + \frac{\text{ب}}{8} + \frac{\text{ب}}{9} + \frac{\text{ب}}{10} + \dots$$

$$\text{اور (۲) } \frac{A_n}{n} = \frac{B}{n} + \frac{B}{n} \times \frac{(n+1)}{2} \times \frac{B}{n} \quad \text{جب } B = C$$

$$..... + \text{جس } 2^2 \times \frac{3}{4} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1} +$$

۴۰۔ ایک مثال کے اختراع کے قابل حسب پیشہ ہیں: اوتہ، تباہ، جہجہ (۴۰)

بعد میں معلوم ہوا کہ جج کی پائٹنس میں تھوڑی سی غلطی واقع ہو گئی ہے، تاہم کہہ کر دینا

زادیکہل محنت کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے۔



۴۵۔ اگر  $\text{م ف} = \frac{1}{2}$  + مم طہ تو فہ کو ایک ایسے سلسلہ میں پھیلاؤ جو لا کی صعودی قوتوں پر مشتمل ہو۔

۴۶۔ ثابت کرد کہ سلسلہ

$$\frac{2 \times 1}{23} + \frac{2 \times 2}{25} + \frac{2 \times 3}{27} + \dots \dots \dots \text{مثلاً تباہی}$$

کا حاصل جمع  $\frac{(22-12)^2}{312}$  ہے۔ (دفعہ ۱۲۷ کو استعمال کرو)

۴۷۔ کسر مسلسل مم طہ - مم ۲ طہ - مم ۲ طہ - مم ۲ طہ - مم ۲ طہ - مم ۲ طہ - مم ۲ طہ کی قیمت معلوم کرو۔

۴۸۔ ثابت کرد کہ کسی مستوی مثلث کی صورت میں جملہ  
مس ب مس ج + مس ج مس ۱ + مس ۱ مس ب  
کی قیمت ۱ اور ۹ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

(پہلے دکھاؤ کہ جملہ مذکور = ۱ + قط ۱ قط ب قط ج اور پھر دفعہ ۱۵۲ کا طریقہ استعمال کرو)

۴۹۔ اگر  $\text{جم ی} = \text{جم (ی) + جم (۱)} + \text{جم } \Delta + \text{جب (ی) + جب (۱)}$  جب  $\Delta$  جم ۱  
۱ اور  $\Delta$  اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے کعبوں سے بی قوتیں نظر انداز  
ہو سکتی ہیں) تو ثابت کرد کہ

$$1 = \Delta \text{ جم } ۱ - \Delta \text{ مم ی جب } ۱ + \Delta \text{ مم ی جب } ۱ + \Delta \text{ جم } ۱$$

۵۰۔ ثابت کرد کہ اگر

$$(1 + \text{خ مس عم}) + \text{خ مس عم}$$

کی قیمتیں حقیقی ہوں تو ایک قیمت (قطعہ) قطعہ کی





۵۸۔ ایک دائرہ کے اندر جبکہ نصف قطر  $OA$  ہے،  $N$  اضلاع کا ایک منظم کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے۔ اس کثیر الاضلاع کے رأسوں سے دائرہ کے ایک تماس پر عمود نکالو گئے ہیں ثابت کرو کہ ان عمودوں کے متکافیتوں کا حاصل جمع  $\frac{2}{3} \times \text{ن} \times \text{م} \times \text{ط}$  ہے جہاں  $2$  ط اس زاویے کو تعبیر کرتا ہے جو نقطہ تماس میں سے گزرنے والا نصف قطر کثیر الاضلاع کے کسی رأس الزاویہ میں سے گزرنے والا نصف قطر کے ساتھ بناتا ہے۔

۵۹۔ ثابت کرو کہ  $\frac{(1 + \text{خ ب}) (\text{ن} + \text{خ ق})}{(1 - \text{خ ب}) (\text{ن} - \text{خ ق})}$  کی قیمت خاص

جم  $2$  (ف عہ + قی لوک ر) + خ جب  $2$  (ف عہ + قی لوک ہا) ہے

جہاں  $R = \frac{1}{2} (1 + \text{ب}^2)$  اور  $e = \frac{1}{2} (1 - \text{ب}^2)$

۶۰۔ سلسلہ  $\text{قم ط} + \text{قم } \frac{\text{ط}}{2} + \text{قم } \frac{\text{ط}}{4} + \dots$  کی  $N$  رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۶۱۔ سلسلہ  $\frac{1}{1 - \text{سنر عہ سنر } 2} + \frac{1}{1 - \text{سنر } 2 \text{ عہ سنر } 2} + \frac{1}{1 - \text{سنر } 4 \text{ عہ سنر } 4} + \dots$  کی  $N$  رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۶۲۔ ثابت کرو کہ  $\frac{\text{جب ط}}{1 - \text{ب}^2 + \text{ب}^4 + \text{ب}^6 + \dots} = \frac{5}{2} = \frac{\text{ن} + \text{خ ق}}{\text{ن} - \text{خ ق}}$  جب (ف عہ + قی لوک ہا) ط

۶۳۔ ثابت کرو کہ  $\frac{(1 + \frac{2}{3}) (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}) (\frac{1}{25} + \frac{2}{3}) \dots}{(1 + \frac{2}{3}) (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}) (\frac{1}{25} + \frac{2}{3}) \dots} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$

۶۴۔ ثابت کرو کہ  $\frac{(1 + \frac{2}{3}) (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}) (\frac{1}{25} + \frac{2}{3}) \dots}{(1 + \frac{2}{3}) (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}) (\frac{1}{25} + \frac{2}{3}) \dots} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$

جب ط + جم ط =  $(1 + \frac{2}{3}) (\frac{1}{9} + \frac{2}{3}) (\frac{1}{25} + \frac{2}{3}) \dots$



۱۔ اگر ایک دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر اسے ایک منتظم مربع (سات ضلعوں کی شکل) بنایا جائے اور اس کے چار متصل رؤس 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا ج + ا د - ا ب = م$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$قط^۲ = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۳} + \frac{۶۱}{۴} + \frac{۳۸۵}{۵} + \dots$$

اور

$$قط^۳ = ۱ + \frac{۳}{۲} + \frac{۳۳}{۳} + \frac{۴۲۳}{۴} + \dots$$

۳۔ اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$م^۲ = \frac{۱}{۴} (ن-۱)(ن-۲) + \frac{۱}{۲} م^۲ (ن-۱) + \dots + \frac{۱}{۲} م^۲ + \frac{۱}{۲} م^۲$$

۴۔ اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$م^۲ = \frac{۱}{۴} (ن-۱)(ن-۲) + \frac{۱}{۲} م^۲ (ن-۱) + \dots + \frac{۱}{۲} م^۲ + \frac{۱}{۲} م^۲$$

۵۔ اگر ن کوئی جفت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو

$$\frac{۱}{۲} م^۲ = \frac{۱}{۲} م^۲ + \frac{۱}{۲} م^۲ + \frac{۱}{۲} م^۲ + \dots + \frac{۱}{۲} م^۲ + \frac{۱}{۲} م^۲$$

۶۔ ثابت کرو کہ اگر ن طاق ہو تو

$$\sum_{r=1}^{n-1} (م^۲ + م^۲) = \frac{۱}{۲} م^۲$$

مساوی ہے  $\frac{۱}{۲} م^۲$  کے اور اگر ن جفت ہو تو یہ مساوی ہے

$$\frac{۱}{۲} م^۲$$

$$۱ - \frac{۱}{۲} (ن-۱) م^۲$$

۷۔ دفعہ ۵۲ کی مساوات (۴) میں ن کے سروں کو مساوی کرنے سے



$$\text{اور } \frac{(۲ن + ۲۰) \text{ جم } ۷ - \text{لوک } ۱ \text{ جب } ۷}{\text{ط}} =$$

$$۸۳ - \text{استدلال ذیل کی غلطی معلوم کرو}$$

$$\text{وٹ} = (\text{وٹ} - \text{خ}) = \text{خ} = [(\text{وٹ} - \text{ط}) \text{خ}] = \text{خ} = \text{وٹ} - ۲۲$$

$$۸۴ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} (۱ + ۲ن) \quad \text{جہاں } ۲ن \text{ کی قیمت کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو}$$

$$\text{ثابت کرو کہ مساوات مس لا} = \text{لا کے حل تقریباً } \text{ط} = \left( \frac{۳۲}{۳} - ۷ - \frac{۱}{۲} \right)$$

$$۸۵ - \text{ثابت کرو کہ } \frac{۲-۲}{۳} = \dots + \frac{۱}{۴ \times ۴} - \frac{۱}{۴ \times ۵} + \frac{۱}{۵ \times ۳} - \frac{۱}{۳ \times ۱}$$

$$\text{اور } \frac{۲-۲}{۸} = \dots + \frac{۱}{۱۴ \times ۱۵} - \frac{۱}{۱۳ \times ۱۱} + \frac{۱}{۹ \times ۴} - \frac{۱}{۵ \times ۳}$$

(دوسرے حصہ کے لئے لوک  $\frac{۱}{۱-۲}$  کی تفصیل میں لا کی بجائے  $\frac{۱}{۲} \text{خ}$  رکھو)

ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع ۲ن قیوں تک معلوم کرو

$$۸۶ - \frac{\text{جم } ۲ \text{ جم } ۲ \text{ جم } ۲}{\text{مس } ۲ \text{ ط}} + \frac{\text{جم } ۴ \text{ جم } ۴ \text{ جم } ۴}{\text{مس } ۴ \text{ ط}} + \frac{\text{جم } ۶ \text{ جم } ۶ \text{ جم } ۶}{\text{مس } ۶ \text{ ط}} + \dots$$

$$۸۷ - \frac{۱-۳ \text{ مس } ۲ \text{ ط}}{۳} + \frac{۱-۳ \text{ مس } ۴ \text{ ط}}{۳} + \frac{۱-۳ \text{ مس } ۶ \text{ ط}}{۳} + \dots$$

$$۸۸ - \frac{۱+۲ \text{ جم } ۲ \text{ جم } ۲}{\text{جب } ۲ \text{ جم } ۲} + \frac{۱+۲ \text{ جم } ۴ \text{ جم } ۴}{\text{جب } ۴ \text{ جم } ۴} + \frac{۱+۲ \text{ جم } ۶ \text{ جم } ۶}{\text{جب } ۶ \text{ جم } ۶} + \dots$$

$$۸۹ - \frac{۲ \text{ جم } ۲}{۲} + \frac{۲ \text{ جم } ۴}{۲} + \frac{۲ \text{ جم } ۶}{۲} + \frac{۲ \text{ جم } ۸}{۲} + \dots$$

$$۹۰ - \frac{۲ \text{ جم } ۲ - \text{جم } ۳ \text{ ط}}{\text{جب } ۳ \text{ ط}} + \frac{۲ \text{ جم } ۴ - \text{جم } ۴ \text{ ط}}{\text{جب } ۴ \text{ ط}} + \frac{۲ \text{ جم } ۶ - \text{جم } ۵ \text{ ط}}{\text{جب } ۵ \text{ ط}} + \dots$$

$$۹۱ - \frac{۳ \text{ جب } ۳ - \text{لا جب } ۳ \text{ لا}}{\text{جم } ۳ لا} + \frac{۳ \text{ جب } ۴ - \text{لا جب } ۴ \text{ لا}}{\text{جم } ۴ لا} + \frac{۳ \text{ جب } ۵ - \text{لا جب } ۵ \text{ لا}}{\text{جم } ۵ لا} + \dots$$

$$۹۲ - \frac{\text{جب ۵ طہ}}{\text{جم ۳ طہ جم ۶ طہ}} + \frac{\text{جب ۳ طہ}}{\text{جم ۲ طہ جم ۴ طہ}} + \frac{\text{جب ۲ طہ}}{\text{جم ۱ طہ}} + \dots$$

$$۹۳ - \frac{\text{جب ۹ طہ}}{\text{جم ۷ طہ جم ۱۸ طہ}} + \frac{\text{جب ۳ طہ}}{\text{جم ۲ طہ جم ۶ طہ}} + \frac{\text{جب ۲ طہ}}{\text{جم ۱ طہ}} + \dots$$

$$۹۴ - \frac{\text{جب ۱۲ لا}}{\text{جم ۸ لا}} + \frac{\text{جب ۶ لا}}{\text{جم ۴ لا}} + \frac{\text{جب ۳ لا}}{\text{جم ۲ لا}} + \dots$$

$$۹۵ - \frac{۱}{۴} \text{مس}^۲ \text{طہ} + \frac{۱}{۳} \text{مس}^۲ \text{طہ} + \frac{۱}{۲} \text{مس}^۲ \text{طہ} + \dots$$

$$۹۶ - \text{مس}^۱ \frac{۱۲}{۳۱} + \text{مس}^۱ \frac{۱۳}{۱۳۹} + \dots + \text{مس}^۱ \frac{۱۲}{۵-۲۳۶}$$

$$۹۷ - \text{مس}^۱ \frac{۲}{۱۹} + \text{مس}^۱ \frac{۴}{۳} + \dots + \text{مس}^۱ \frac{۴}{۳+۲}$$

$$۹۸ - \text{مس}^۱ \frac{۱}{۲ \times ۱ - ۱} + \text{مس}^۱ \frac{۱}{۲ \times ۳ - ۱} + \dots$$

$$۹۹ - \text{مس}^۱ \frac{\text{لا جب ۲ طہ}}{\text{لا جم ۲ طہ}} + \text{مس}^۱ \frac{\text{لا جب ۲ طہ}}{\text{لا جم ۲ طہ}} + \text{مس}^۱ \frac{\text{لا جب ۲ طہ}}{\text{لا جم ۲ طہ}} + \dots$$

$$+ \text{مس}^۱ \frac{\text{لا جب ۸ طہ}}{\text{لا جم ۸ طہ}} + \dots$$

$$۱۰۰ - \text{جز ۲ طہ} + \text{جز ۲ طہ} + \dots + \text{جز ۲ طہ} + \text{جز ۲ طہ} + \dots$$

$$۱۰۱ - \frac{۱}{۲} \text{قم}^۲ \text{طہ} + \frac{۱}{۲} \text{قم}^۲ \text{طہ} + \frac{۱}{۲} \text{قم}^۲ \text{طہ} + \dots$$

$$۱۰۲ - \text{ایک سلسلہ کی رو میں رقم} \frac{۱}{۲} \text{جم رطہ مس طہ ہے، اس سلسلہ کا حاصل جمع لاتنا ہی تک معلوم کرو۔}$$

۱۰۳ ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} - \text{جب طہ جم طہ} = ۲ \text{ جب طہ جب طہ} + \text{طہ} + ۲ \text{ جب طہ جب طہ} + ۲ \text{ جب طہ جب طہ} + \dots + \text{طہ} \\ ۱۰۴ - \text{ثابت کرو کہ} \quad \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

$$۱۰۵ - \text{ثابت کرو کہ} \quad \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{2}{2} \quad \dots + \frac{1}{129}$$

$$\text{اور} \quad \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{2}{2} \quad \dots + \frac{1}{129}$$

$$۱۰۶ - \text{ثابت کرو کہ} \quad \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

$$۱۰۷ - \text{ثابت کرو کہ} \quad \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{2}{2} \quad \dots + \frac{1}{129}$$

$$۱۰۸ - \text{سلسلہ لائنایں} \quad ۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{129}$$

$$۱۰۹ - \text{ثابت کرو کہ} \quad \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

$$۱۱۰ - \text{سلسلہ} \quad ۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{129}$$

$$۱۱۱ - \text{ثابت کرو کہ} \quad \frac{1}{1} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{384 - 2230 + 22}{448} =$$



۱۱۳ - ثابت کرو کہ

$$(1) \dots\dots\dots + \frac{1}{14+1} + \frac{1}{13+1} + \frac{1}{8+1} + \frac{1}{3+1} \dots\dots\dots \text{تالانتا ہی}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} \text{ مزر } \frac{\pi}{8} =$$

$$\text{اور (2) } \dots\dots\dots + \frac{1}{1-24} + \frac{1}{1-23} + \frac{1}{1-22} \dots\dots\dots \text{تالانتا ہی}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} \text{ مزر } \frac{\pi}{8}$$

(اشلہ ۲۱ مشق ۷ کا جواب استعمال کرو)

$$114 - \text{ثابت کرو کہ} \dots\dots\dots - \frac{5}{24+25} + \frac{3}{24+23} - \frac{1}{24+22} \dots\dots\dots \text{تالانتا ہی}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ قطر } \frac{\pi}{4} =$$

$$\text{اور} \dots\dots\dots + \frac{6}{24+22} - \frac{5}{24+25} - \frac{3}{24+23} + \frac{1}{24+22} \dots\dots\dots \text{تالانتا ہی}$$

$$\frac{\pi}{24} \text{ جز } \frac{\pi}{24} \text{ قطر } \frac{\pi}{24} =$$

(اشلہ ۲۱ مشق ۹ میں ط کی بجائے  $\frac{\pi}{4}$  -  $\frac{\pi}{4}$  اور  $\frac{\pi}{4}$  +  $\frac{\pi}{4}$  رکھو)

۱۱۴ - اگر ن جنس ہو تو ثابت کرو کہ

$$(1) \dots\dots\dots = \frac{(1+1) - (1-1) - (1-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$1 = \frac{\pi}{2} \text{ مس } \frac{\pi}{2} \text{ مس } \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots \text{مس } \frac{\pi}{2} (1-1) =$$

$$115 - \text{ثابت کرو کہ} \frac{(1+1) - (1-1) - (1-1)}{2}$$

$$= (1 + \frac{\pi}{2}) (\frac{\pi}{2} + 1) \dots\dots\dots (\frac{\pi}{2} + 1) (\frac{\pi}{2} + 1)$$

جہاں  $r = \frac{1}{p} (n-1)$  اور  $n$  طاق ہے۔

$$114 - \text{ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب} \frac{\frac{1}{1}+1}{\frac{1}{1}+1} \times \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+1} \times \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}+1} \times \dots$$

مساوی ہے قطر  $(\frac{1}{p} \pi \pi)$  جبر ۲

116 - اگر  $e$  بہ  $a$  جہ ..... اعداد مقرو  $2, 3, 4, 5, \dots$  کو شبیر کریں

$$\text{تو } \frac{e^2 - e}{e^2 + 1} \times \frac{e^2 - e}{e^2 + 1} \times \dots = \frac{2}{3}$$

118 -  $n$  اضلاع کے دو منظم کثیر الاضلاع  $p$  و  $q$  .....  $p$  اور  $q$  بہ ..... ب  
ایک ہی دائرہ کے اندر بنائے گئے ہیں جس کا نصف قطر  $p$  بہ ثابت کرو کہ

$$II \text{ (دور ہیں)} = \frac{p}{q} \text{ جب } n \text{ طہ}$$

جہاں  $r$  اور  $s$  کو اسے  $n$  تک سب قیثیں دی جائیں اور طہ  $s$  و  $p$  کو  
تعبیر کرے جو دو اشکال مذکورہ بالا میں سے ہر ایک کے ایک رأس الزاویہ  
کو مرکز دائرہ سے وصل کرنے والے نصف قطروں کے درمیان بنتا ہے۔  
119 -  $p$  ج ۵ .....  $n$  اضلاع کا ایک منظم کثیر الاضلاع  $p$  بہ جو  
نصف قطر  $p$  کے ایک دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے، دائرہ کا مرکز  $p$  بہ ثابت  
کرو کہ  $n$  زوایا کا حاصل جمع  $p$ ،  $q$ ،  $r$ ،  $s$ ،  $t$ ، ..... وغیرہ  $p$  کے  
ساتھ بناتے ہیں

$$\frac{r \text{ جب } n \text{ طہ}}{r \text{ جم } n \text{ طہ} - r}$$

ہے، جہاں  $p$  و  $q$  =  $r$  اور  $\angle$   $p$  و  $q$  = طہ

(دفعہ ۱۱۹ کی مانند لا۔  $r$  جم  $n$  طہ  $p$  و  $r$  جب  $n$  طہ کو اس کے خطی اجزائے

ضروری میں تفسیر کرو اورا مثلہ ہذا کی پہلی مشق کے مسئلہ کے مطابق عمل کرو)

۱۲۰۔ ایک دائرہ کے تماس پر نقطہ تماس ب سے مساوی فاصلے ب ب' ب' ب'..... ناپے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ دائرہ کے قطر کے مساوی ہے، ان فاصلوں کے وسطی نقاط ج، ج، ج..... ہیں نقطہ تماس ب میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے کو نقطہ ب' ب'..... ج، ج..... سے وصل کیا گیا ہے اور یہ خط دائرہ سے بالترتیب نقاط ب' ب' ب'..... ج، ج..... پر ملے ہیں۔ ثابت کرو کہ اوتا ب' ب' ب'..... کے حاصل ضرب کی نسبت ب ج، ب ج، ب ج..... کے حاصل ضرب کے ساتھ  $m \times m \times m$  : ۱ ہے۔

۱۲۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^2 = (\text{مس}^2 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \text{مس}^2 = \frac{2}{3} \text{مس}^2$$

دونقاط ن اور ق کا باہمی فاصلہ ۲ ف کے مساوی ہے اور یہ دونوں نقطے ایک خط مستقیم سے مساوی فاصلوں ج پر واقع ہیں۔ اس خط مستقیم پر لا متناہی نقطوں کا ایک ایسا سلسلہ واقع ہے کہ ان نقطوں کا باہمی فاصلہ ۱ ہے اور نقاط ن اور ق ان میں سے ایک نقطہ سے متساوی الفصل ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان نادیوں کا مجموعہ جون ق کے محاذی سلسلہ بالا کے ہر ایک نقطہ پر بنتا ہے طہ ہو تو

$$\text{مس}^2 = \frac{2}{3} \text{مس}^2 - \frac{1}{3} \text{مس}^2$$

(دفعہ ۱۲۲ کے مطابق جب (لا + خ م) کے اجزائے ضروری ہو اورا مثلہ ہذا کی مشق

اول یا مثلہ لگاؤ)

$$۱۲۲۔ ثابت کرو کہ  $\prod_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n + n'} \right] = \frac{\text{جزء } ۲ - \text{جزء } ۳}{\text{جزء } ۲۱۰ - \text{جزء } ۲۱۱}$$$

(وضہ ۳۰ کی مساوات (۲) میں ۲ = ۱ اور ۲ ط = ۲ ط = ۲ ط رکھو، پچسہ  
۲ = ۲ ط = ۲ ط اور ۲ ط = ۲ ط رکھو، ایک جواب کو دوسرے جواب پر  
تقسیم کرو)

۱۲۳۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\text{مس}^1 \text{ان}^1 + \text{مس}^1 \frac{n}{2} + \text{مس}^1 \frac{n}{3} + \dots$$

$$\text{کا حاصل جمع مس}^1 \frac{\text{مس}^1 - \text{مس}^1 \text{مزمز}}{\text{مس}^1 + \text{مس}^1 \text{مزمز}} = \frac{n}{21}$$

(وضہ ۱۲۲ کے نتیجہ سے شروع کرو اور ط = ن ۲ مخرج رکھو)

۱۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^1 \text{ان}^1 + \text{مس}^1 \frac{n}{3} + \text{مس}^1 \frac{n}{5} + \dots = \text{مس}^1 \text{الاتاہی} = \text{مس}^1 \text{ط مزمز}$$

$$\text{جہاں ط} = \frac{n}{21}$$

$$۱۲۵۔ ثابت کرو کہ مس^1 (م م مزمز) + مس^1 (م ط مزمز) = [م ط + \frac{n}{3}] \text{مزمز}$$

$$+ \text{مس}^1 [م ط + \frac{n}{3}] \text{مزمز} + \dots = \text{مس}^1 \text{ان}^1$$

کا حاصل جمع مس^1 (م م مزمز) ہے، اگر ن ط مزمز ہو اور

مس^1 (م م مزمز) ہے اگر ن ط مزمز ہو

(ا مثلاً ۲۰ مشق ۱ کے نتیجہ کو استعمال کرو)

$$۱۲۶۔ سلسلہ مس^1 \frac{1}{1} + مس^1 \frac{1}{2} + مس^1 \frac{1}{3} + \dots = \text{الاتاہی}$$



کی قیمت جون ستونوں اور ن قطاروں پر مشتمل ہے جم ن طہ کے مساوی ہے۔  
۱۳۳۔ ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{\frac{1}{2} \text{ مس عہ} + \frac{1}{2} \text{ مس عہ} + \frac{1}{2} \text{ مس عہ} + \dots}{\text{کان واں مستحق} = \frac{(\text{مس عہ} + \text{قط عہ}) - (\text{مس عہ} - \text{قط عہ})}{(\text{مس عہ} + \text{قط عہ}) - (\text{مس عہ} - \text{قط عہ}) + 1}$$

۱۳۴۔ ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{\frac{2}{2} \text{ مس عہ} - \frac{2}{2} \text{ مس عہ} - \frac{2}{2} \text{ مس عہ} - \dots}{\text{کان واں مستحق} = \frac{\text{جم عہ جب } (2 + 2) \text{ عہ}}{\text{جب } 2 \text{ عہ}} - \text{ہے۔}$$

۱۳۵۔ ثابت کرو کہ ذیل کی کسر مسلسل کی قیمت

$$\frac{\frac{2}{-1} \text{ قط عہ}}{\frac{2}{-1} \text{ قط عہ}} - \frac{\frac{2}{-2} \text{ قط عہ}}{\frac{2}{-2} \text{ قط عہ}} - \dots \text{ ر خارج قسموں تک}$$

$$\frac{\text{جب ر عہ}}{\text{جب } 2 \text{ (ر + ۱) عہ جم عہ}} - \text{ہے۔}$$

۱۳۶۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} = \frac{1}{-1} - \frac{\frac{2}{-3} \text{ طہ}}{\frac{2}{-5} \text{ طہ}} - \dots$$

(ذیل کے سوالوں میں احصائے تفرقات سے کام لینے میں  
بہت آسانی ہوگی)







# جوابات

## حصہ دوم

۱ صفحہ ۱۳

۸۔ لوک ۲۰ ۹۔ لوک ۳۰ - ۱۰ - ۱۱

۲ صفحہ ۳۳

$$\begin{aligned} ۱ - & \overline{۲۷} (\text{جم } \frac{\pi}{۴} + \text{خ جب } \frac{\pi}{۴}) \\ ۲ - & \overline{۲۷} [\text{جم } (-\frac{\pi}{۴}) + \text{خ جب } (-\frac{\pi}{۴})] \\ ۳ - & ۲ [\text{جم } \frac{\pi}{۴} + \text{خ جب } \frac{\pi}{۴}] \\ ۴ - & ۵ [\frac{۲}{۵} \text{خ} + \frac{۳}{۵}] \end{aligned}$$

$$۵ - \overline{۲۷} \sqrt{۲ + ۴} \left[ \frac{۱}{\overline{۲۷} + ۴} \text{خ} + \frac{۱ + \overline{۲۷}}{\overline{۲۷} + ۴} \right]$$

$$۶ - (\overline{۲۷} - \overline{۲۷}) [\text{جم } \frac{\pi}{۱۲} + \text{خ جب } \frac{\pi}{۱۲}]$$

$$۷ - \text{جم } (۱۰ \text{ اٹھ } + ۱۲ \text{ عہ}) - \text{خ جب } (۱۰ \text{ اٹھ } + ۱۲ \text{ عہ})$$

$$۸ - \text{جم } (۷ \text{ عہ } + ۱۰ \text{ بد } - ۱۲ \text{ جہ } - ۱۴ \text{ لہ}) + \text{خ جب } (۷ \text{ عہ } + ۱۰ \text{ بد } - ۱۲ \text{ جہ } - ۱۴ \text{ لہ})$$

$$۹ - \text{جم } ۱۰ \text{ اٹھ } - \text{خ جب } ۱۰ \text{ اٹھ } ۱۰ - ۱۱$$



۴ صفحہ ۵۲

$$\begin{aligned}
 & ۵ - \text{س ط} - ۱۰ - \text{اس ط} + \text{س ط} \\
 & \hline
 & ۱ - ۱۰ - \text{اس ط} + ۵ - \text{س ط} \\
 & ۷ - \text{س ط} - ۵ - \text{س ط} + ۲۱ - \text{س ط} - \text{س ط} \\
 & \hline
 & ۱ - ۲۱ - \text{س ط} + ۲۵ - \text{س ط} - ۷ - \text{س ط} \\
 & ۹ - \text{س ط} - ۸۲ - \text{س ط} + ۱۲۶ - \text{س ط} - ۲۶ - \text{س ط} + \text{س ط} \\
 & \hline
 & ۱ - ۲۶ - \text{س ط} + ۱۲۶ - \text{س ط} - ۸۲ - \text{س ط} + ۹ - \text{س ط}
 \end{aligned}$$

۵ صفحہ ۶۳

$$\begin{aligned}
 & ۹ = ۲ - ۸ - ۵ \quad \frac{1}{4} = ۷ \quad \frac{1}{7} = ۸ \\
 & ۹ = \frac{1}{3} \quad ۱۰ = \frac{1}{4} \quad ۱۱ = ۲ \quad \frac{1}{5} = ۱۲ \\
 & ۱۲ = \text{صفر} \quad ۱۴ = \frac{۱ + ۱ + ۱ + ۱}{۱} \quad ۱۵ = \frac{1}{7} \\
 & ۱۶ = ۲ \quad ۱۷ = \frac{1}{4} \quad ۱۸ = \frac{۲۵}{۱۳} \\
 & ۱۹ = \infty \quad ۲۰ = \frac{۲(۲۰ - ۲)}{۲} \quad ۲۱ = \frac{1}{4} \\
 & ۲۲ = \frac{۲(۲۰ - ۲)}{۲} \quad ۲۳ = ۲۳ \quad ۲۴ = \text{صفر} \\
 & ۲۵ = \text{لوک} \quad ۲۶ = ۲۶ \quad ۲۷ = ۲۷ \\
 & ۲۸ = ۹ - ۱ \quad ۲۹ = ۱ - ۳۰ = \text{صفر} \quad ۳۱ = ۱ \\
 & ۳۲ = \frac{۲}{۲} \quad ۳۳ = \text{صفر} \quad ۳۴ = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

۶ صفحہ ۷۲

$$۸ - ۵۵ - ۵۵ - ۳۲ - ۳۲ - ۱۶۵ - ۱۱ - ۱۱ - ۱۱ - ۱۱$$

## ۹ صفحہ ۹۶

- ۱۔  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  جم ن ط (ن طاق) اور  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  جم ن ط [ (ن جفت) ]
- ۲۔  $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$  جب ن ط (ن طاق) اور  $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$  (جم ن ط) (ن جفت)
- ۳۔  $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$  ن تم ن ط (ن طاق) اور  $\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$  ن تم ن ط (ن جفت)
- ۴۔  $\frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$  ن قط ن ط (ن ن طاق) اور  $\frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90}$  جم ن ط [ (ن ن جفت) ]
- ۵۔  $\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$  ن م (ن ن ط) (ن ط)
- ۶۔  $\frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{1}{132}$  سس ن ط (ن طاق) اور  $\frac{1}{12} - \frac{1}{13} = \frac{1}{156}$  (ن جفت)
- ۷۔  $\frac{1}{13} - \frac{1}{14} = \frac{1}{182}$  ن تم (ن ن ط + ن ط) + ن (ن - ۱)
- ۱۰۔ اگر ن طاق ہو تو مسفر اگر ن جفت ہو تو  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2n}$  (۱-۱) جم ن ط - ۱

## ۱۱ صفحہ ۱۱۲

- ۱۷۔ جم ن جفت ن ط - خم جب ن جفت ن ط
- ۱۸۔  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  جب ن ط - خم جب ن ط
- ۱۹۔  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$  جب ن جفت ن ط - خم جم ن جفت ن ط
- ۲۰۔  $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$  جم ن جفت ن ط + خم جب ن جفت ن ط
- ۲۱۔ جب ن جفت ن ط + خم جب ن جفت ن ط

$$\frac{\text{جہز ۲ عہ} + \text{خ جب ۲ ب}}{\text{جہز ۲ عہ} + \text{جم ۲ ب}}$$

$$\frac{\text{جہز ۲ عہ} + \text{خ جب ۲ ب}}{\text{جہز ۲ عہ} + \text{جم ۲ ب}} = ۲۳ - ۲$$

۱۲ صفحہ ۱۲۰

$$۱ - \frac{\text{خ}}{\text{ط}} + \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \text{ لوک } \frac{\text{خ} + \text{ط}}{\text{ط}} \text{ [ اگر جم ط مثبت ہو تو علامت + ہونی چاہئے ]}$$

[ اگر جم ط منفی ہو تو - ]

$$۲ - \text{جب ط جب ط} + \text{خ لوک } [ \text{ط} + \text{ط} - \text{ط} ]$$

۱۳ صفحہ ۱۲۹

$$۱۵ - \frac{۱}{۲} \text{ لوک (ی' + ۲) } + \text{خ سٹا } \frac{\text{م}}{\text{م}} \text{ جہاں}$$

$$\text{ی} = \frac{۱}{۲} \text{ لوک } \frac{\text{جہز ۲ عہ} - \text{جم ۲ ب}}{۲} \text{ اور ی = سٹا (م لا سٹا)}$$

۱۵ صفحہ ۱۲۲

$$۱ - ۲ \quad ۲ - ۲ \quad ۳ - ۳ \quad ۴ - ۴ \quad ۵ - ۵$$

۱۶ صفحہ ۱۵۰

$$۱ - \frac{\text{جہز ۲ عہ}}{\text{جم ۲ ب}} \quad ۲ - \text{سفر بشرطیکہ عہ ۱۲ کا کوئی ضعف نہ ہو}$$

$$\frac{\text{جب عہ (جم عہ - جب عہ)}}{\text{۱ - جب ۲ عہ + جب ۲ عہ}} = ۴ - \frac{\text{جب ۲ عہ}}{\text{۱ - جب ۲ عہ + جب ۲ عہ}}$$



۱۵۵ نمبر ۱۵

- ۱-  $\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}$
- ۲-  $\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}$
- ۳-  $\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}$
- ۴-  $\text{جب ط جم (جم ب) جنبر (جب ب) - جم ع جب (جم ب) جنبر (جب ب)}$
- ۵-  $\text{جب (جم ب) جنبر (جب ب) جم (ع - ب)}$
- ۶-  $\text{جم (جم ب) جنبر (جب ب) جب (ع - ب)}$
- ۷-  $\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}$
- ۸-  $\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}$
- ۹-  $\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۰-  $\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۱-  $\text{مس ۱} = \frac{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}$  سوائے اس صورت کے جب ج = ۱ اور ع = ۱۴ (۱۴) ۲
- ۱۲-  $\text{مس ۲} = \frac{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}$  سوائے اس صورت کے جب ج = ۱ اور ع = ۲ (۲) ۲
- ۱۳-  $\text{لوک ۱} = \frac{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}$  (۱۴) ۲
- ۱۵-  $\text{لوک ۲} = \frac{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}$
- ۱۶- اگر جم و شبت ہو تو ' + ' منفی ہو تو ' - ' صفر ہو تو صفر
- ۱۷-  $\text{جم (ع - ب) مس ۱} = \frac{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}$  جب (ع - ب) منفی ہو تو صفر
- ۱۸-  $\text{لوک ۱} = \frac{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}{\text{وج جم تب جب (ع + ج جب ب)}}$  سوائے اس صورت کے جب ع = ۱ یا ک کوئی صفر ہو

$$۱۹ = \frac{1}{x} \text{ لوک } [(E+1) + \sqrt{E^2 + 4}] \text{ جم } ۲ + ۳ + ۴$$

$$۲۰ = \frac{1}{x} \text{ سس } ۱ - \frac{1}{x} \text{ سس } ۲ \text{ (جم بہ تفرع)}$$

$$۲۲ = \frac{1}{x} \text{ سس } ۲ + ۳ + ۴ \text{ لوک } ۲ - (۳ + ۲) - ۱$$

۱۸ صفحہ ۱۶۰

$$۱ = \text{جم } ۲ - \text{جم } ۱ \text{ (۲) تم } ۲ - \text{جم } ۱ - \text{جم } (۱ + ۱) \text{ ط}$$

$$۳ = \text{تم } ۲ - \text{سس } (۱ + ۱) \text{ ط} - \text{سس } ۱ \text{ ط}$$

$$۴ = \text{تم } ۲ - \text{سس } (۲ + ۱) \text{ ط} - \text{سس } ۱ \text{ ط}$$

$$۵ = \frac{1}{x} \text{ تم } ۲ - \text{سس } (۱ + ۱) \text{ ط} - \text{سس } ۱ \text{ ط}$$

$$۶ = \text{سس } ۲ - \frac{1}{x} \text{ سس } ۲ - \frac{1}{x} \text{ سس } ۲ \text{ اور}$$

$$\text{ج} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \text{ سس } ۲$$

$$۷ = \text{سس } ۲ - \frac{1}{x} \text{ سس } ۲ - \frac{1}{x} \text{ سس } ۲$$

$$۸ = \text{سس } ۲ - \text{سس } ۱ \text{ ط}$$

$$۹ = \text{سس } ۲ - \text{سس } ۱ \text{ ط}$$

$$۱۰ = \text{سس } ۲ - \text{جم } ۱ \text{ ط}$$

$$۱۱ = \frac{1}{x} \text{ جب } ۲ + (-۱) + \frac{1}{x} \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ ط}$$

$$۱۲ = \frac{1}{x} \text{ جب } ۲ - \frac{1}{x} \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ ط}$$

$$۱۳ = \frac{1}{x} \text{ تم } ۲ - \text{قط } ۱ + ۱ \text{ ط} - \text{قط } ۱ \text{ ط}$$

$$۱۴ = \text{سس } ۲ - \frac{1}{x} \text{ سس } ۲ - \frac{1}{x} \text{ سس } ۲$$

$$۱۵ = \frac{1}{x} \text{ جم } ۲ + (-\frac{1}{x}) - \frac{1}{x} \text{ جم } ۱ \text{ ط}$$

$$۱۶ = \frac{1}{x} \text{ جب } ۲ - \frac{1}{x} \text{ جب } ۱ \text{ ط}$$



$$\begin{aligned}
 ۱۷- \frac{1}{x} &= \{ ۳س ۳ط - سن ط \} \\
 ۱۸- \frac{1}{y} &= \{ ۳م ط - ۳م ط \} \\
 ۱۹- ستا &= \{ (۱+ن) (۲+ن) \} - ستا ۲ \\
 ۲۰- ستا (ن+۱) &= ستا ایمنی ستا \frac{ن}{ن+۱} \\
 ۲۱- جی &= ستا ۶ - ستا ا ج = \frac{۱۲}{۲} \\
 ۲۲- جی &= جتا ۱ - جتا \frac{۱}{۱+۱} اور ج = \frac{۱۲}{۲}
 \end{aligned}$$

۱۹ صفحہ ۱۶۷

$$\begin{aligned}
 ۱- ۱ &= ۱ جم ط + ۱ جم ۲ ط - ۱ جم ۳ ط + ..... تالانتاری \\
 ۲- ۲ &= ۲ جم ط + ۲ جم (ط + ف) + ۲ جم (ط + ۲ ف) + ..... تالانتاری \\
 ۳- ۳ &= ۳ جم ط + ۳ جم (ط + ف) + ۳ جم (ط + ۲ ف) + ..... تالانتاری \\
 ۴- ۴ &= ۴ جم ط + ۴ جم (ط + ف) + ۴ جم (ط + ۲ ف) + ۴ جم (ط + ۳ ف) + ..... تالانتاری \\
 ۵- ۵ &= ۵ جم ط + ۵ جم (ط + ف) + ۵ جم (ط + ۲ ف) + ۵ جم (ط + ۳ ف) + ..... تالانتاری \\
 ۶- ۶ &= ۶ جم ط + ۶ جم (ط + ف) + ۶ جم (ط + ۲ ف) + ۶ جم (ط + ۳ ف) + ..... تالانتاری \\
 ۷- ۷ &= ۷ جم ط + ۷ جم (ط + ف) + ۷ جم (ط + ۲ ف) + ۷ جم (ط + ۳ ف) + ..... تالانتاری \\
 ۸- ۸ &= ۸ جم ط + ۸ جم (ط + ف) + ۸ جم (ط + ۲ ف) + ۸ جم (ط + ۳ ف) + ..... تالانتاری \\
 ۹- ۹ &= ۹ جم ط + ۹ جم (ط + ف) + ۹ جم (ط + ۲ ف) + ۹ جم (ط + ۳ ف) + ..... تالانتاری \\
 ۱۰- ۱۰ &= ۱۰ جم ط + ۱۰ جم (ط + ف) + ۱۰ جم (ط + ۲ ف) + ۱۰ جم (ط + ۳ ف) + ..... تالانتاری
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۲- ۱۲ &= (۱) م = ستا \frac{۱}{۲} - (۲) م = ستا ۱ \\
 - لوک ۲ &= جب ۲ ط + ۱ جم ۴ ط + ۱ جب ۶ ط - ۱ جم ۸ ط \\
 - &= ۱ جب ۱۰ ط + ..... تالانتاری
 \end{aligned}$$

$$۱۴- ۲ [جب ط - \frac{1}{4} جب ط ۳ + \frac{1}{8} جب ط ۵ - ..... مالاتاری]$$

$$۱۵- ۲ [جم ط مس (\frac{11}{4} - \frac{7}{4}) - (\frac{1}{4} جم ۲ ط مس (\frac{11}{4} - \frac{7}{4}) + \dots]$$

$$+ ۲ لوک جم (\frac{11}{4} - \frac{7}{4})$$

$$\text{اگر منفرد } > \frac{11}{4}$$

۳۰ صفحہ ۱۸۴

$$۱- II [لا ۲ لاجم (۱+۳) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۲]$$

$$۲- II [لا ۲ لاجم (۱+۶) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۳]$$

$$۳- II [لا ۲ لاجم (۱+۹) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۴]$$

$$۴- II [لا ۲ لاجم (۱+۳) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۵]$$

$$۵- II [لا ۲ لاجم (۲+۶) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۶]$$

$$۶- (لا-۱) II [لا ۲ لاجم \frac{11}{8} + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۲]$$

$$۷- II [لا ۲ لاجم (۱+۲) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۲]$$

$$۸- (لا-۱) II [لا ۲ لاجم \frac{11}{4} + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۳]$$

$$۹- (لا+۱) II [لا ۲ لاجم (۱+۲) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۳]$$

$$۱۰- (لا-۱) II [لا ۲ لاجم \frac{11}{8} + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۴]$$

$$۱۱- (لا+۱) II [لا ۲ لاجم (۱+۲) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۴]$$

$$۱۲- (لا-۱) II [لا ۲ لاجم \frac{11}{4} + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۴]$$

$$۱۳- II [لا ۲ لاجم (۱+۲) + \frac{11}{4} [جاں ر = ؛ ایا ۴]$$

۲۹- دفعہ ۱۱ کی رقم میں لا کی بجائے رکھو اور پھر طرین کا لوکار تم کو  
رکے لحاظ سے تفرق کرو اور پھر ط کے لحاظ سے مکمل کرو۔

۲۲ صفحہ ۲۲۲

$$۲ = \pm \dots ۳۶ ۳۲ ۶۰ \text{ فٹ اور } \pm \dots ۹ ۱۹ ۲۹ ۶۰ \text{ فٹ}$$

$$۳ = \frac{\text{جم } ۲ \text{ بہ لہ}}{\text{جم } (ع + ۲ \text{ بہ})} \text{ اور } \frac{\text{جم } ۱ \text{ جبیا بہ لہ}}{\text{جم } (ع + ۲ \text{ بہ})}$$

$$\frac{۳۶ ۳۱ ۱۰}{۵۴} \text{ اور } \frac{۱۱ (۳۶ - ۲) ۵}{۵۴} \text{ فٹ}$$

$$۷ = \frac{\text{لا - ما جم ج}}{\text{ج جب لہ}} \text{ اور } \frac{\text{لا - لا جم ج}}{\text{ج جب لہ}} \text{ نیم قطری زادے}$$

$$۸ = - \frac{۱۱}{۲} \text{ پنج}$$

۲۳ صفحہ ۲۳۰

$$۱ = - ۱ \text{ اور } \frac{۳۶ \pm ۱}{۲}$$

$$۲ = - ۱ - ۲ + ۱ \text{ جم } ۳۰ - ۱ - ۲ + ۱ \text{ جم } ۱۶۰ \text{ اور } - ۱ - ۲ + ۱ \text{ جم } ۹۸۰$$

$$۳ = - ۳ \text{ اور } ۲ \pm ۳۶ ۲ \text{ (۴) } ۴ \text{ اور } ۱ \pm ۳۶$$

$$۵ = ۲۷۲ \text{ جم طہ جہاں طہ } = ۳۳ ۳۷ ۵۲$$

$$۱۵۳ ۳۷ ۵۲ ۳۷ ۵۲ ۳۷ ۵۲$$

$$۶ = - \frac{۳}{۲} + \frac{۳۶ ۲}{۲} \text{ جم طہ جہاں طہ } = ۳۹ ۵۱ ۵۹ ۵۱ ۵۹ ۵۱ ۵۹ ۵۱ ۵۹$$

$$۷ = \frac{۳}{۲} - ۳۶ \text{ جم طہ جہاں طہ } = ۳۴ ۵۱ ۵۹ ۵۱ ۵۹ ۵۱ ۵۹ ۵۱ ۵۹$$

۲۴ صفحہ ۲۳۳

$$۳ = \text{جلہ کی قیمت } ۲ \text{ اور } - ۲ \text{ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔}$$



۴۷- مس ط

$$۵۱- \frac{\text{جم}^2 \text{ع}}{\text{جیب}^2 \text{ع}} \left[ \frac{1}{\text{جیب}^2 \text{ع}} - \frac{1}{\text{جیب}^2 \text{ع}} \right] \text{جیب}^2 \text{ع} (1 + \text{ن}) (2 + \text{ن})$$

$$۵۲- 1 + \frac{1}{2} \text{جم ط} + \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \text{جم ط} + \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \text{جم ط} + \dots$$

$$۵۳- \frac{7}{4} - 2 = ۶۰ \quad \text{م} - \frac{1}{4} = \text{م م ط}$$

$$۶۱- \frac{\text{مبزر} (1 + \text{ن}) \text{ع}}{\text{جبزه}} = ۷۸ = ۲۵۸۴۰$$

$$۷۹- ۱۵۱۲۱ = ۱۵۱۹۱ \quad ۸۰- ۷۵۸ = ۱۱۵۰ \quad ۱۱۵۱$$

$$۸۶- \frac{1}{4} \text{قم ع} [\text{قط} (2 + \text{ن}) \text{ع} - \text{قط}^2 \text{ع}]$$

$$۸۷- \frac{1}{8} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \text{مس}^2 \text{ط} - 2 \text{مس ط}$$

$$۸۸- \text{جیب}^2 \text{ع} \text{قم}^2 \text{ع} \text{قم}^2 \text{ع} - \text{جیب}^2 \text{ع} (3 \times 2 \text{ع}) \text{قم}^2 \text{ع} \text{قم}^2 \text{ع} + \text{ع}$$

$$۹۷- \text{جیب ط} [\text{م} - \frac{\text{ط}}{1 + \frac{1}{4}}] - \text{م} \frac{\text{ط}}{4}$$

$$۹۰- \text{م م ط} - 2 \text{م م ط} = ۹۱- \frac{1}{4} [\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \text{مس}^2 \text{لا} - \text{مس}^2 \text{لا}]$$

$$۹۲- \text{جیب}^2 \text{ع} \text{قم}^2 \text{ع} \text{قط}^2 \text{ع} = ۹۳- \frac{1}{4} [\text{م} \frac{\text{ط}}{4} - \text{م} \frac{\text{ط}}{4}]$$

$$۹۴- \text{قم}^2 \text{لا} - \text{قم}^2 \text{لا} = ۹۵- \frac{1}{4} \text{مس}^2 \text{ط} - \text{مس ط}$$

$$۹۶- \text{ستا} \frac{12 \text{ن}}{13 + 12 \text{ن}} = ۹۷- \text{ستا} \frac{12 \text{ن}}{13 + 12 \text{ن}} = ۹۸- \text{ستارن لا}$$

$$۹۹- \text{ستا} \frac{\text{لا جیب ط}}{\text{لا جیب ط}} - \text{ستا} \frac{\text{لا جیب ط}}{\text{لا جیب ط}} = ۱۰۰- \frac{1}{4} \text{جبر ط} [\text{م} - \frac{\text{ط}}{1 + \frac{1}{4}}] - \text{م} \frac{\text{ط}}{4}$$

$$۱۰۱- \frac{1}{4} \frac{\text{م}^2}{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \frac{\text{م}^2}{1 + \frac{1}{4}} = ۱۰۱- \frac{1}{4} \frac{\text{م}^2}{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \frac{\text{م}^2}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۰۶ - \text{جب ط جم (جب ط مس ط) - ۱} \\
 ۱۰۸ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} [ (۲-۱) \text{ جم } \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳} \text{ جب } \frac{۲}{۳} ] \\
 ۱۱۰ - \frac{۲}{۳} (۱ + ۲)
 \end{aligned}$$

$$۱۲۶ - \text{مس } \frac{\text{جب لہ جب مہ} + \text{جب لہ جب مہ}}{\text{جب لہ جب مہ} - \text{جم لہ جب مہ}} - \frac{۲}{۳} \text{ جہاں}$$

$$\text{لہ} = ۲۲ \text{ جم } \frac{۲}{۳} \text{ اور مہ} = ۲۲ \text{ جب } \frac{۲}{۳}$$

$$۱۳۹ - \text{م تم } ۲ \text{ لا} - \frac{۱}{۳} \text{ تم } \frac{۱}{۳}$$

۱۴۰ -  $\frac{۱}{۳}$  جم (۲ جب ط - ۱) تا وقتیکہ ط ن ۲ کے برابر ہو  
 اس صورت میں حاصل جن جم ۲ ہوگا اگر ن جفت ہو اور ۲  
 ہوگا اگر ن طاق ہو

$$۱۴۱ - \text{ن جب ن ط} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ن} = ۱ \\ \text{ن} = ۲ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{جب } (\frac{۲}{۳} + \text{ط}) \\ \text{لا } ۲ \text{ جم } (\text{ط} + \frac{۲}{۳}) + ۱ \end{array}$$





# فہرست اصطلاحات

Amplitude	سمت
Analytical Trigonometry	علم مثلث تحلیلی
Analyse	تحلیل کرو
Complex	ملتقف
Convergency	استدقاق
Circular function (s)	تفاعل تحت عمل مستدرہ
Cubic equation	مساوات درجہ سوم - تکیبی
Co-efficient	سر
Commensurable	متوافق
Data	معطیات، مفروضات
Double Valued function	دو قیمت والا تفاعل
e (exponent)	نو
Exponential series	سلسلہ قوت نما
Expansion	تفصیل
Expand	پھیلاؤ
Hyperbolic functions	زائدی یا ہڈولی تفاعل -
Sinh, Cosh, etc	ہڈولی جیب - جیز جیز وغیرہ
Index. Indices	قوت نما - قوت نمائوں
Incommensurable	متباہن
Imaginary (wholly, partly)	خیالی - (کلا جزاً)



Indeterminate	غیر معین
I	خ
Limiting value	انتہائی قیمت
Limit	انتہا - نہایت - غایت
$\text{Lt}_{n=\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$	نہایت $(1 + \frac{1}{n})^n$ کا
Limit when n becomes infinitely great	انتہا جب n لا انتہا بڑھ جاتا ہے
Logarithm to base e	لوگارتھم اساس 'e' پر
Log	لوگ
Many valued function	بہت سی قیمتوں والا تفاعل
Method of Induction	استقرا کا طریقہ
Multiple angle	ضعفی زاوے
Multiples of $2\pi$	۲ کے اضعاف
Modulus	مقیاس (مق)
Order of small quantities	مقادیر صغیر کا مرتبہ
Osculating series	سلسلہ اجتزازی
Operation	عمل
Operator	عامل
Principal value	قیمت خاص
Proportional Parts	اجزائے متناسبہ
Quadratic equation	مساوات درجہ دوم
Quadrature	رقبہ دریافت کرنا - ترکیب کرنا
Resolve	تحلیل کرنا
Result	اصل

Value	قیمت
Single valued function	ایک قیمت والا
Solve	حل کرو
Theory	اصول نظریہ
Unreal	غیر حقیقی یا خیالی
Period (a) of function	ایک تناقل کا دور (اوار)
Calculus	احصاء
Differential calculus	احصاء تفرقات
Differential equations	تفرقی مساواتیں
Differential coefficient	تفرقی سر
Differential	تفرقی
Differentiation	تفرقہ
Differentiate	تفرق کرو
Integral Calculus	احصاء تکملات
Integral	تکمیلی
Integration	تکمیل
Integrate	تکمیل کرو



# غلط مکے

علم مثلث تحلیل

صفحہ سطر	غلط	صحیح	صفحہ سطر	غلط	صحیح
۱۳ ۵	$1 + 3 = 4$	$1 + 3 = 4$	۳۴ ۲۰	$1 + 3 = 4$	$1 + 3 = 4$
۱۳ ۹	ما قبل کا سلسلہ	ما قبل کا سلسلہ	۸ ۲۶	ما قبل کا سلسلہ	ما قبل کا سلسلہ
۱ ۱۰	متراوت	متراوت	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۲ ۱۰	قوة	قوة	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۹ ۱۸	یعنی می = ۱	یعنی می = ۱	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۱۰ ۲۴	پس رقم مذکور	پس رقم مذکور	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۱۲ ۷	$1 + 3 = 4$	$1 + 3 = 4$	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۱۱ ۳۲	مشامل	مشامل	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۷ ۳۴	خجم جہ	خجم جہ	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۸ ۷	خجم لہ	خجم لہ	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۱۵ ۳۸	(لا خجم) می	(لا خجم) می	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۱۶ ۷	مرق	مرق	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۱۲ ۳۹	$1 + 3 = 4$	$1 + 3 = 4$	۱۰ ۲۷	معادل	معادل
۱۵ ۴۰	جب $\frac{1}{2}$	جب $\frac{1}{2}$	۱۰ ۲۷	معادل	معادل

صفحہ سطر	غلط	صحیح	صفحہ سطر	غلط	صحیح
۸ ۹۲	$\frac{1-n}{p}$	$\frac{1-n}{p}$	۱۵ ۱۹۳	$\frac{p}{13} =$	$\frac{p}{13} =$
۲ ۱۰۹	$\frac{p}{q} +$	$\frac{p}{q} +$	۱۱ ۱۹۶	$\frac{p}{90} =$	$\frac{p}{90} =$
۱۳ ۱۱۷	$\sqrt{\frac{1-n}{1}}$	$\sqrt{\frac{1-n}{1}}$	۶ ۱۹۷	$\frac{p}{2} =$	$\frac{p}{2} =$
۱۰ ۱۳۲	$2n\pi +$	$2n\pi +$	۴ ۲۳۹	عدہ مم طہ	عدہ مم طہ
۳ ۱۳۵	$(\frac{p}{q} +$	$(\frac{p}{q} +$	۱ ۲۵۰	$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$	$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$
۱۲ ۱۳۷	ج فو خ عہ	ج فو خ عہ	۲ ۲۵۱	ثابت کرو کہ حجم	ثابت کرو کہ حجم
۶ ۱۵۰	$\frac{p}{q} \neq$	$\frac{p}{q} \neq$	۹ ۲۵۳	$\pi \pm$	$\pi \pm$
۱۰ ۱۵۷	منزل لا $\frac{1}{5}$	منزل لا $\frac{1}{5}$	۹ ۲۵۸	$1 + 6 + 8 - 6$	$1 + 6 + 8 - 6$
۱۶ ۱۶۹	$\frac{p}{q} (2 + 3)$	$\frac{p}{q} (2 + 3)$	۴ ۲۶۹	قط عہ	قط عہ
۴ ۱۷۶	$2 - \frac{p}{q}$	$2 - \frac{p}{q}$	۱۶ ۲۷۷	۲ جب عہ	۲ جب عہ
۱ ۱۷۷	ثابت کرو کہ	ثابت ہو کہ	۵ ۲۷۸	(حجم ب) جنر	(حجم ب) جنر

